DESCARTES

LA « GEOMETRIE »

DE 1637

VINCENT JULLIEN

PUF 1996

SOMMAIRE

SOURCES ET ABRÉVIATIONS

Les références au corpus cartésien sont données suivant l'édition Adam-Tannery des *Œuvres* de Descartes en 13 volumes, Paris, Cerf, 1897-1913, Nouvelle présentation, Paris, Vrin, 1964-1974, abrégée A.T.; j'indique ensuite le tome et la page (pour la *Géométrie*, j'omets le tome, A.T. VI).

La correspondance éditée par Charles Adam et Gérard Milhaud (P.U.F., Paris, 1941) a aussi servi, en particulier le tome III et ses indications concernant les textes de commentaire de *La Géométrie*, (En abrégé, A.M.)

La *Géométrie*, parue pour la première fois, avec le *Discours* et les deux autres essais à Leyde, en 1637, est dans A.T., tome VI, paru en 1902 et revu par Bernard Rochot et Pierre Costabel en 1965, pp.368-485. J'ai couramment utilisé l'édition publiée par J.R. Armogathe, M. Authier et V. Carraud, du *Discours de la Méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie*, Corpus, Fayard, Paris, 1987.

Je renvoie en outre à l'édition par Ferdinand Alquié des*Œuvres philosophiques* de Descartes, Garnier, 3 volumes, Paris, 1988 (première éd. 1963), abrégée G.F. En particulier, je renvoie à la traduction par Jacques Brunschwig, des *Règles pour la direction de l'esprit* , G.F.I, pp.67-204.

J'ai tiré profit des *Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit et la recherche de la vérité*, traduites et annotées par J.L. Marion, avec des notes mathématiques de P. Costabel, Martinus Nijhoff, La Haye, 1977.

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

La *Géométrie* de Descartes est réputée illisible. Elle n'était pas d'un abord facile au lecteur du XVII[e] siècle et elle l'est encore moins trois ou quatre siècles plus tard. Cet *Essai* joue pourtant un rôle considérable, tant dans le système philosophique de Descartes que dans l'histoire de la pensée mathématique. Il y a donc grand profit à tirer de son étude et le présent travail voudrait en présenter les leçons principales.

L'étude qui suit est en deux parties qui, normalement, se complètent.

La première évite presque toute considération technique (équations, figures etc.) et vise à situer le troisième *Essai de la méthode* par rapport au programme philosophique cartésien, tel qu'il est progressivement exposé dans les *Regulae*, le *Discours de la méthode* et les *Essais*, enfin dans les *Principes de la philosophie*. Cette première partie insiste en outre sur ce qui fait la cohérence et l'unité de la *Géométrie*. Il est possible d'être ignorant en mathématiques et de lire cette première partie.

Mais il faut tout de même en venir au texte et c'est pourquoi, dans une seconde partie, je suivrai l'ordre des trois livres qui constituent cet *Essai*. J'ai veillé à éliminer les démonstrations, calculs et figures quand ils n'étaient pas indispensables. Je commente donc la *Géométrie* d'assez loin mais, je l'espère, sans la perdre de vue. Cette distance prise avec la technicité (qui est aussi la substance) du texte ne peut tout de même pas faire qu'il ne s'agisse pas de mathématiques ; les lecteurs pour lesquels elles sont un langage tout à fait étranger pourront donc lire cette seconde partie en « survolant » certains passages.

LA PLACE DE LA « *GÉOMÉTRIE* »
DANS L'ŒUVRE, SA COHÉRENCE

L'ÉTUDE DES MATHÉMATIQUES. PREMIÈRES DÉTERMINATIONS.

LES MATHÉMATIQUES CHEZ LES JÉSUITES

"L'univers scolaire est un scandale"[1]. Cette forte sentence d'Henri Gouhier pourrait être *l'expression philosophique* des souvenirs de collège de Descartes. Nous aurons l'occasion de comprendre la violence de la critique cartésienne puisque -selon lui- ce qui importe y est construit sur du sable quand on ne tire rien de valable de ce qui a des fondations assurées.

Ce scandale mis à part, il faut sans doute reconnaître que le futur philosophe bénéficie d'un enseignement de qualité au collège jésuite de La Flèche, où il demeure entre 1607 et 1615[2]. A cette époque, la place que les mathématiques doivent occuper dans la *ratio studiorum* des collèges jésuites a été évaluée en hausse par rapport à ce qu'elle était dans les années 1580 lorsque la discussion s'est engagée.

L'évolution résulte de la double influence des exigences extérieures à la compagnie d'une part[3] et de ce que nous nommerons l'effet-Clavius d'autre part. Celui-ci a planté bien haut l'étendard de la géométrie et de l'arithmétique chez les compagnons d'Ignace. Le *Collegio Romano*, où est formé l'encadrement jésuite, nourrit en son sein une académie mathématique que le fameux éditeur et commentateur d'Euclide préside. Pour Clavius et aussi pour ses élèves, il ne s'agit pas seulement d'étudier Euclide, mais aussi Pappus et sa fameuse *Collection* rassemblant bon nombre des travaux géométriques classiques grecs. On s'intéresse aussi aux algébristes modernes et aux travaux d'astronomie (sujet qui constitue peut-être le principal centre d'intérêt de Clavius).

---

[1] H.Gouhier, p. 28.

[2]Ces dates, défendues par G. Rodis-Lewis, sont controversées. Certains proposent plutôt 1606-1614, mais tous invalident celles de Baillet (1604-1612).

[3] Les fondateurs des collèges de Tournon et de Pont à Mousson par exemple réclament de la compagnie qu'elle assure un tel enseignement, ce qu'elle a d'ailleurs bien du mal à assumer dans les débuts.

Les arguments pour ou contre l'affirmation de la place autonome des mathématiques dans l'enseignement des collèges nourrissent un débat d'un grand intérêt[4]. Traditionnellement, cette discipline, ainsi que la logique, était intégrée au cours de philosophie dont elle n'occupait qu'une fort modeste part. Les mathématiques acquerront leur indépendance, mais peu à peu et par des voies souvent tortueuses. Selon Baillet, les programmes de philosophie à *La Flèche* incluaient encore cette discipline jusqu'en 1626.

Pour Clavius, les mathématiques tiennent une place intermédiaire entre la métaphysique et la science de la nature. Elles démontrent absolument ce qu'elles entreprennent de discuter. Puisqu'en outre elles n'acceptent non seulement rien qui soit faux, mais même rien qui soit seulement probable, on doit leur accorder la première place entre toutes les sciences. Leur utilité va encore bien au delà et personne ne peut accéder à la métaphysique, et aux autres sciences (philosophie naturelle, morale, dialectique etc.) sans elles. Enfin, nul ne saurait être un expert en la méthode, s'il se dispense de savoir ce qu'est l'essence des démonstrations géométriques[5].

Quoiqu'il en soit, en 1607, les jésuites de *La Flèche* enseignent les mathématiques. Ce collège était un des fleurons de la compagnie. Fondé en 1603, sous le nom de “Collège royal”, il dû bénéficier d'un personnel choisi avec soin par ses responsables. Jean Chastellier en est le recteur, or ce père s'adonne -outre aux exercices spirituels- aux mathématiques depuis les années 1590. Il a correspondu avec Clavius, s'intéresse aux algébristes modernes (Pelletier, Nuniez, Viète, Chebel) et poursuit même quelques travaux de recherche. Les historiens ne sont cependant pas parvenu à découvrir avec certitude qui a enseigné les mathématiques à Descartes dans ses années de collège. Si c'est le père

---

[4]Cf. les débats et arguments avancés par Alessandro Piccolomini (1508-0576): les démonstrations mathématiques ne sont pas potissimae, leurs certitudes ne relèvent pas de la forme démonstrative. Barozzi (1537-), éditeur de Proclus sur Euclide: les démonstrations sont potissimae et leur vérité dérive bien des causes aristotéliciennes. Pietro Catena (1501-1576):*Les principes mathématiques sont plus clairs que le soleil de midi”*, elles ont capacité à être un langage pour les autres sciences. Benito Perreira (1535-1610), C.J.Collegio Romano, les maths ne sont pas, à proprement parler, une science. Francesco Buonamici C.J., élève de Clavius, reprend la valeur potissimae des démonstrations mathématiques. Réfutation de Pereira. Evidemment Christophe Clavius, C.J. (1537-1612).

[5]Paraphrase des *Operum mathematicorum*, I, 1611. *Prolégomènes aux disciplines mathématiques*, p.5-7, traduits par Michelle Beyssade.

François Véron -professeur de philosophie- qui s'en est chargé, le cours a quelque chances de n'avoir pas été fameux[6].

On sait la détermination vaine avec laquelle Descartes a voulu, par la suite, faire reconnaître et même adopter son système philosophique par la Compagnie de Jésus. Il aura été plus heureux en mathématiques. Les *Commentaires sur la Géométrie* de l'un des plus importants pères mathématiciens du début du XVIII^e^, Claude Rabuel s'ouvrent sur un éloge enthousiaste et dithyrambique de Descartes géomètre, accompagné de quelques réserves quant à sa métaphysique[7].

Il est rapporté que les exceptionnelles capacités de Descartes pour les mathématiques étaient déjà manifestes au collège, et *"à en croire un de ses condisciples, plus d'une fois l'écolier embarrassa son maître"*[8]. Il dû profiter d'une pratique qui semble avoir été de mise dans les collèges jésuites et qui consistait à favoriser les cours privés et les lectures supplémentaires pour les élèves particulièrement doués. Sans doute, René eut-il ainsi accès à des ouvrages plus relevés que ceux qui formaient le corpus normalement enseigné. Le *Discours de la méthode* en apporte confirmation puisque, écrit Descartes, *"ne m'étant pas contenté des sciences qu'on nous enseignait, j'avais parcouru tous les livres, traitants de celles qu'on estime les plus curieuses et les plus rares qui avaient pu tomber entre mes mains"*[9].

Ce qui frappe l'esprit du jeune étudiant en mathématiques est la certitude des leurs démonstrations. Plus exactement c'est le contraste entre celles-ci et les humanités, les *"écrits des anciens païens, fort superbes et fort magnifiques, mais qui n'étaient bâtis que sur du sable"*[10]. S'il leur accorde la certitude, il trouve en même temps à la géométrie et à l'arithmétique un caractère vain et futile dont il ne les déparera jamais vraiment. C'est d'abord la manière dont est exploité ce gisement de savoir qu'il dénonce. De ce domaine de connaissances assurées, on ne tire en effet à peu prés rien qui vaille: *"une science s'offre avec tous les caractères qui décèlent la présence active de la*

---

[6] Voir la remarque sur F. Véron in *Vie de Descartes* de Charles Adam, p.23. Le professeur de philosophie a peut-être été le père Noël.

[7]Rabuel, Préface et Introduction. *La Géométrie* servait de base aux cours avancés dans la Compagnie.

[8] Id. pp.24-25.

[9]*Discours*, G.F. I, pp.571-2

[10]*Discours* in G.F. I, p.575.

raison , poursuit H. Gouhier, *et personne ne songe à lui demander d'éduquer la raison; les professeurs reconnaissent sa valeur technique sans avoir l'air de soupçonner sa valeur de culture; ils s'en servent pour former des ingénieurs et non des hommes"*[11] Le *Discours de la méthode* offre le portrait rétrospectif d'un jeune homme achevant sa formation, à la fois déçu par des *"études où s'opposaient des sciences précises mais dépourvues de sens vital et une morale sans rigueur démonstrative"* [12] mais confiant car *"l'espoir ne quitte pas Descartes. Espoir dans les mathématiques, mais aussi en lui-même et en ce qu'il pourra découvrir dans le grand livre du Monde"*[13].

Ces premières impressions sont peut-être à la source de deux sentiments, la *joie et la gène*[14] que l'on retrouve bien souvent, ensemble, chez Descartes mathématicien. Joie de la découverte[15], de la clarté des idées, de la maîtrise exceptionnelle des méthodes et gène de la puérilité, de la vanité de l'objet en soi. Dans le cours même de la *Géométrie*, ceci est nettement, explicitement présent, comme nous aurons l'occasion de le vérifier.

Pour apporter quelque paix à l'esprit mathématicien, il faudra qu'il *remarque leur vrai usage* et que *la certitude et l'évidence de leurs raisons, à cause* desquelles il s'y plaît tant, ne sert pas *qu'aux arts mécaniques*. Il faudra donc qu'il bâtisse sur *des fondements si fermes et si solides* quelque chose *de plus relevé*[16].

LE CORPUS TRADITIONNEL EST VRAI.

Nous aurons l'occasion de revenir sur la critique cartésienne de l'état dans lequel il trouve les mathématiques, mais un point décisif est à signaler. Même dans leur état de désorganisation, les mathématiques produisent-en règle générale- des résultats vrais. Le corpus euclidien est d'un bloc accepté comme exact, les livres d'Apollonius, les traités d'Archimède aussi. On ne trouve pas, chez Descartes, de discussion sur la véracité des premiers principes en géométrie[17]. Les définitions, les

---

[11]Gouhier, p.28

[12]F. Alquié, *Introduction au Discours*, G.F. I, p.558.

[13]Id.

[14]Expression d'H.Gouhier, id.

[15]Descartes évoque ainsi, dans la *Règle X*, *"le plaisir innocent [de trouver par moi-même]"*, G.F. I, p.

[16]Paraphrase du *Discours de la méthode*, G.F. I, pp.574-5

[17]La discussion existait pourtant parmi ses contemporains ou prédécesseurs récents: Clavius avait réexaminé dans le détail bien des démonstrations des

axiomes et postulats de la géométrie élémentaire sont reçus avec toutes les garanties qu'offre le ‘regard de l'esprit’.

Les axiomes de la géométrie élémentaires sont des vérités éternelles et, s'il est exact que Dieu eût pu les créer autrement, nous n'avons qu'à constater ce qu'elles nous apprennent. Il n'est même pas *“nécessaire [de les dénombrer] parce que nous ne saurions manquer de les savoir lorsque l'occasion se présente de penser à elles”* observe Descartes[18]. Or, l'occasion de considérer une notion première, c'est la présence de l'idée.

La réduction logique et formelle de ce corpus fondamental est vaine, ce qui importe est l'enquête ontologique vers un *Etre, l'existence duquel nous soit plus connue que celle d'aucun autre […] La façon dont on réduit les autres propositions à celle-ci: impossibile est simul esse et non esse, est superflue et de nul usage; au lieu que c'est avec très grande utilité qu'on commence à s'assurer de l'existence de Dieu…*[19]

A y regarder de plus près, la lettre à Clerselier que nous venons de citer contient une remarque qui aurait pu engager Descartes dans une critique logique des énoncés premiers en mathématique. Il pose, certes, qu'il n'est pas nécessaire de chercher un principe unique ultime[20], mais il ajoute que deux choses suffisent pour recevoir un énoncé comme principe premier. Qu'on en puisse déduire d'autres énoncés et qu'il ne soit pas, lui-même déductible d'un autre. Ces deux conditions auraient pu l'engager à examiner si la géométrie usuelle était bien conforme à ceci, conformité fort discutable dans les *Eléments* d'Euclide eux-mêmes. Le fait est qu'il ne s'attache pas à un tel examen et que *“Descartes garde pour modèle l'évidence non critiquée des Eléments d'Euclide”*[21].

La position cartésienne consistant à fonder la géométrie sur des énoncés intuitivement acquis s'oppose aux efforts à peu près

---

anciens, Roberval travaillera (un peu plus tard) à une refondation des *Eléments* d'Euclide etc.

[18]*Principes, I, 49*

[19] *A Clerselier*, juin-juillet 1646, G.F. III, p.658.

[20]Thèse à laquelle Leibniz opposera radicalement la réduction au principe d'identité.

[21] Belaval, p.189.

contemporains de Roberval et de Pascal visant à la fonder selon une méthode quasi-axiomatique [22].

LES ERREURS DE JUGEMENT POSSIBLES

Si la Géométrie élémentaire et ses productions classiques sont mises hors de doute, il n'en va pas de même des mathématiques contemporaines (celles de Cavalieri, certaines méthodes de Fermat). Et c'est en général pour une même et unique raison: les démonstrations convoquant des méthodes infinitésimales échappent à la connaissance certaine. Même en mathématiques, il peut y avoir erreur, mais c'est une erreur de jugement, issue de la disproportion établie entre la finitude de notre entendement et l'absence de bornes de notre volonté. L'erreur vient de ce que j'étende ma volonté (d'affirmer, de nier...) aux choses que je n'entends pas. C'est assez connu, pour Descartes les procédures qui, en géométrie, introduisent des considérations infinitésimales, tombent dans cette ornière. On verra ainsi Descartes triompher du difficile problème de Debeaune dans lequel intervient une régression infinitésimale mais en refuser sa propre solution: *“L'intersection de ces deux lignes droites décrira exactement la courbe AVX, qui aura les propriétés demandées. Mais je crois que ces deux mouvements sont tellement incommensurables, qu'ils ne peuvent être réglés exactement l'un sur l'autre; et ainsi cette ligne est du nombre de celles que j'ai rejetées de ma géométrie…”*[23]. S'engageant dans une régression à l'infini où nous ne pouvons affirmer ou nier qu'il y ait un dernier nombre, nous ne pouvons comprendre la limite vers laquelle tendent les séries considérées. Le résultat ne peut être compris par les hommes[24].

---

[22] « *Descartes et Pascal conçoivent l'un et l'autre le raisonnement géométrique comme procédant du simple au complexe, au contraire de la déduction syllogistique qui procédait du général au particulier, mais Descartes tient en posant ses principes à affirmer une vérité essentielle ; Pascal, précurseur de l'axiomatique moderne tend à les considérer comme de simples postulats. Dans la conduite du raisonnement, Descartes ne cesse de faire intervenir l'évidence, qui légitime le passage de chaque chaînon déductif au chaînon suivant. Pascal, pour sa part, veut surtout éviter tout glissement de sens et faire en sorte que le contenu des principes ne soit jamais débordé* », Jean Mesnard, vol.II, p. 378.

[23] *A Debeaune*, 20 février 1639, in *Correspondance,* Adam- Milhaud, t.III, p.185

[24] L'analyse de ce travail de Descartes a été parfaitement établie par J. Vuillemin (pp.11-28) et aussi par G. Milhaud (pp. 69-175) et Y. Belaval (pp.309-312).

On observera que certaines méthodes des anciens présentent le même défaut. Pour résoudre le problème de la n-section d'un angle, ils ont eu recours à une ligne qui ne peut être entièrement connue, la quadratrice. Si cette dernière pouvait être construite, alors, le problème serait résoluble; le fait est, pour Descartes, qu'elle ne peut l'être complètement et que son usage invalide cette manière de partager un angle[25].

Il y a plus, l'exactitude d'un résultat, d'une construction, peut accompagner une faute. Voilà qui est très caractéristique de la critique cartésienne. Un procédé démonstratif, logiquement irréprochable peut pourtant être géométriquement fautif ou plus exactement méthodiquement fautif. Un critère supplémentaire -conforme aux préceptes de la méthode- doit être respecté: c'est le principe de simplicité. Descartes est explicite au début du troisième livre de *La Géométrie* et fournit un exemple. Si une construction (il s'agit là de la construction des moyennes proportionnelles) peut être réalisée à l'aide de différentes courbes, il sera impératif de n'y employer que la courbe du genre le plus simple. Le recours -même s'il est démonstrativement impeccable- à une courbe d'un genre plus composé est une faute. Il est possible que le recours à une courbe d'un genre plus composé suggère une construction plus facile; quoiqu'il en soit, il devra être rejeté au profit de la courbe moins composée, la construction dusse-t-elle en être plus compliquée. Ceci n'est conforme, ni à la tradition classique, ni aux procédés mathématiques modernes qui privilégient l'élégance de la démonstration et la rigueur déductive. Ce principe est par contre tout-à-fait conforme à la méthode cartésienne. En effet, son respect est nécessaire pour parcourir la science en bon ordre, pour la déployer, de degré en degré, sans en oublier aucun, en évitant les sauts qui en rompraient les enchaînements.

Les propositions probables sont -elles aussi- entachées d'erreur et sont donc occasion d'introduire la fausseté dans les mathématiques lorsqu'elles y sont mêlées. Enoncer quelque chose comme probable, c'est laisser la volonté porter un jugement allant au delà de ce qui a été conçu clairement et distinctement[26].

---

[25]Voir, ci dessous, p.nn, la présentation de la quadratrice et des raisons de son irrecevabilité.

[26]Cette position générale s'applique en mathématiques: Descartes ne prend aucune part aux débuts, pourtant brillants, du calcul des probabilités.

Telles sont les voies par lesquelles la fausseté peut s'introduire en mathématiques, voies qui n'affectent ni leurs notions premières, ni leur procédures traditionnelles[27]. Lorsque Descartes écrit *“qu'il y a des hommes qui se méprennent en raisonnant, même touchant les plus simples matières de géométrie et y font des paralogismes...”*[28], il ne met pas en doute la valeur du raisonnement ou des premières notions en mathématiques, mais un mauvais usage du jugement, par manque de méthode.

L'IMAGINATION ET LA GÉOMÉTRIE

“Si l'entendement traite de questions où il n'y a rien de corporel ou qui ressemble au corporel, il ne peut recevoir aucune aide de ces facultés (sens, mémoire, imagination); au contraire, pour qu'il ne recoive point d'entrave, il faut écarter les sens et dépouiller l'imagination, autant que faire se peut, de toute impression distincte. Mais si l'entendement se propose un objet d'examen qui se puisse être rapporté au corps, il faut en former l'idée dans l'imagination, avec autant de distinction qu'il sera possible…” [29].

Il convient donc de savoir si la géométrie est ou non ‘une question qui relève de quelque chose de corporel ou qui y ressemble’. Les *Regulae* traite cette question en détail.*“Sont purement matérielles, celles* [les choses] *qui ne se connaissent que dans les corps, comme sont l'étendue, la figure, le mouvement”* [30]. Il est difficile de ne pas reconnaître ici les objets de la géométrie, dont l'étude doit donc mobiliser l'imagination. En effet poursuit Descartes, *«il est impossible de se représenter une figure dépourvue de toute étendue”*[31]. La réflexion sur les figures a donc à voir avec cet attribut essentiel de la matière qu'est l'étendue, donc avec l'imagination qui est convoquée dès que l'objet visé n'est pas immatériel.

A cela, on pourra objecter la *Lettre à Elisabeth*, du 28 juin 1643 où l'on apprend que *“le corps, c'est-à-dire l'extension, les figures et les mouvements, se peuvent aussi connaître par l'entendement seul, mais beaucoup mieux par l'entendement aidé de l'imagination”*[32]. Dans ce

---

[27]Sans doute faudrait-il se pencher sur le cas du raisonnement apagogique.
[28]*Discours de la méthode, quatrième partie,* G.F. 1, p.602
[29]Règle XII, A.T. 416-7
[30]Règle XII, A.T., 419
[31]Règle XII, A.T., 421
[32]A.T. III, 691

passage, seules sont visées les notions premières de la géométrie et non pas tous les objets concernant l'extension et les figures; or les notions premières -qu'elles concernent ou non la géométrie- relèvent d'un traitement particulier[33].

Il est exact que l'*étendue* peut recevoir un sens selon lequel elle est séparée du corps; prise en ce sens, elle ne correspond à aucune idée dans la fantaisie, elle relève de l'entendement pur. Il en va de même de la figure, du nombre, de la surface, de la ligne, du point ou de l'unité. Ce sens là, précis, n'est pas celui qui fonctionne dans la géométrie cartésienne. Au contraire, même séparés par abstraction de leurs sujets, ces termes n'excluent rien du corps, de la chose nombrée, de la quantité dont ils ne sont pas séparés par une distinction réelle. Voici pourquoi, on peut et on doit user en géométrie, pour faire réflexion sur eux, du secours de l'imagination[34].

Les lignes de la géométrie cartésiennes ne sont donc pas réellement séparées des objets matériels. Ceci n'implique nullement qu'en faisant réflexion sur elles, l'on doive embrasser l'ensemble des déterminations des corps; on peut -on doit même- porter son attention sur un mode particulier de la chose, sur une (ou deux) de ses dimensions, en faisant abstraction du reste de ses déterminations[35]. La multiplicité et l'étendue, sur lesquelles on exerce son esprit sont des attributs ou des modes des quantités multiples ou des corps. On ne doit pas nier l'ensemble des autres déterminations de ces réalités quand bien même on en abstrait -pour les besoin de la déduction arithmétique ou géométrique- le nombre ou l'étendue.

"De même, si nous traitons d'une figure, pensons que nous traitons d'un sujet étendu, conçu sous ce rapport seulement qu'il est figuré; si c'est un corps, pensons que nous traitons d'un sujet identique, en tant qu'il possède longueur, largeur et profondeur; si c'est une surface, représentons-nous un sujet identique, en tant que possédant longueur et largeur, et en laissant de côté sa profondeur, mais sans la nier; si

---

[33] *"Enfin, doivent être appelées communes celles qui s'attribuent sans discrimination, tantôt aux choses corporelles, tantôt aux esprits, comme l'existence, l'unité, la durée [...] C'est à ce groupe qu'il faut aussi rapporter ces notions communes [...] qui du reste, peuvent se connaître soit par l'entendement pur, soit par l'entendement percevant intuitivement les images des choses matérielles"* , Règle XII, A.T. 419-20.

[34] Voir sur ce point la regle XIV, A.T. 445

[35]Règle XVI, A.T. 454

c'est une ligne, en tant que possédant la longueur seulement; si c'est d'un point, concevons toujours un sujet identique, abstraction faite cette fois de tout, sauf du fait qu'il est un être"[36].

De ces remarques, il résulte que l'entendement, dans le cours de ses investigations géométriques, réserve une place à l'imagination, auxiliaire qui lui est même, ici, indispensable.

Il s'agit cependant de préciser quelques caractères de cette imagination nécessaire à la production des connaissances géométriques. S'il ne s'agissait que d'une imagination reproductrice trop réaliste, elle serait vite porteuse de confusion. C'est cette conception là de l'imagination que l'auteur reprochera aux anciens. A cette conception restreinte de l'imagination, Descartes oppose une faculté de former des images qui, certes, exprime les objets qui sont l'occasion de ces images, mais peuvent bien ne pas leur ressembler.

"Il faut [...] prendre garde à ne pas supposer que, pour sentir, l'âme ait besoin de contempler quelques images qui soient envoyées par les objets jusqu'au cerveau, ainsi que font communément nos philosophes; ou, du moins, il faut concevoir la nature de ces images tout autrement qu'ils ne font. [...] Ils ne considèrent en elles autre chose, sinon qu'elles doivent avoir de la ressemblance avec les objets qu'elles représentent [...] au lieu que nous devons considérer qu'il y a plusieurs autres choses que des images qui peuvent exciter notre pensée, comme par exemple les signes et les paroles, qui ne ressemblent en aucune façon aux choses qu'elles signifient. [...] Il faut au moins que ous remarquions qu'il y a aucunes images qui doivent en tout ressembler aux objets qu'elles représentent [...] mais qu'il suffit qu'elles leur ressemblent en peu de choses, et souvent même, que leur perfection dépend de ce qu'elles ne leur ressemblent pas tant qu'elles pourraient faire.[...] Suivant les règles de la perspective, [les tailles douces] représentent souvent mieux des cercles par des ovales que par d'autres cercles, et des carrés par des losanges, et ainsi de toutes les autres figures; en sorte que souvent, pour être plus parfaite en qualité d'images, et représenter mieux un objet, elles doivent ne pas lui ressembler. Or il faut que nous pensions tout le même des images qui se forment en notre cerveau et que nous remarquions qu'il est seulement question de savoir comment elles peuvent donner moyen à

[36]Règle XIV, G.F. I, p.176 Voir la suite.

l'âme de sentir toutes les diverses qualités des objets auxquels elles se rapportent et non point comment elles ont en soi leur ressemblance"[37].

N'est-il pas remarquable qu'un des exemples choisi soit justement celui de l'ellipse, meilleure image, expression plus utile du cercle lui-même pour un bon exercice de l'entendement? L'imagination est conçue comme expression, mise en rapport réglée entre l'objet et l'esprit. Ceci est de grande conséquence pour *La Géométrie* où les figures sont mises en lignes et où les lignes sont mises en caractères algébriques. Ainsi, non seulement la mise en ligne relèverait d'une imagination qui ne serait pas trivialement la reproduction-ressemblance des objets visés, mais elle en serait une expression imaginaire, à la fois utile comme stimulant de la pensée et assez éloignée du point de vue de la ressemblance figurée.

Selon des considérations identiques, l'algèbre serait doté d'un statut étroitement associé à celui des lignes (elles-même expression des figures et de leurs dimensions). Les signes de l'algèbre, comme signes-aide-mémoire, sont aussi des expressions imaginées des objets visés, cette fois-ci des lignes. La mémoire ayant évidemment à voir avec l'imagination (au point de pouvoir lui être assimilée parfois, ou incluse), l'algèbre, aide-mémoire ou économie de pensée, est un des moyens par lequel la pensée est stimulée par une faculté imaginative de l'entendement.

Les caractères de l'algèbre seraient des images d'images, images écrites des lignes, elles-mêmes images de figures et de courbes. Mais ceci n'est pas invraisemblable chez Descartes pour qui la relation de relation est tout-à-fait concevable. Comment ne pas souhaiter pousser un peu l'avantage de cette interprétation; elle nous fournit un argument de poids pour considérer les constructions de courbes et de lignes-solution d'une part et les équations algébriques d'autre part comme des notions très homogènes, comme deux regards non-contradictoires sur une même réalité.

---

[37] *La Dioptrique*, A.T. VI, 112-113. La doctrine est -sur ce point- constante comme en témoignent les deux citations suivantes: *«Il faut remarquer ici que l'entendement ne peut jamais se laisser tromper [...] pourvu qu'en outre il n'aille pas juger que l'imagination lui rapporte avec fidélité les objets des sens, ni que les sens se fassent les porteurs de la vraie figure des choses."* Règle XII, A.T., 423, et

"Pour sentir, l'âme n'a pas besoin de contempler aucunes images qui soient semblables aux choses qu'elle sent" , *Discours,* 5, VI, 114.

2. LA MÉTHODE ET LES DIVERS DOMAINES MATHÉMATIQUES

Si l'on comparait l'acquisition de connaissances certaines à un jeu, la méthode ne fournirait pas les “règles du jeu”, mais plutôt les principes (ou règles) des stratégies gagnantes[38]. *“Ce que j'entends maintenant par méthode, ce sont des règles certaines et faciles, par l'observation exacte desquelles on sera sûr de ne jamais prendre une erreur pour une vérité, et, sans y dépenser inutilement les forces de son esprit, mais en accroissant son savoir par un progrès continu, de parvenir à la connaissance vraie de tout ce dont on sera capable”*[39].

Les objets révélateurs de vérité doivent être ordonnés et bien disposés; ce qui est le plus absolu doit être soigneusement repéré. Toute cette méthode et ce qui fait son secret est ainsi résumée[40].

La méthode ne se confond pas avec les connaissances qu'elle permet d'acquérir, ni avec les moyens qui sont mobilisés pour l'exercer, à savoir les facultés cognitives. Elle permet de trouver sa route dans le labyrinthe des causes et des effets mêlés.

Descartes expérimente l'efficacité de ses préceptes méthodiques et nous en livre un des bénéfices les plus substantiels: *“mais, ce qui me contentait le plus de cette méthode était que, par elle, j'étais assuré d'user en tout de ma raison, sinon parfaitement, au moins le mieux qui fut en mon pouvoir”*[41]. Cette expérience, il l'a faite en examinant d'abord les techniques les plus insignifiantes, conformément à la règle X. S'il y mentionne *“celles des artisans qui tissent des toiles et des tapis, ou celles des femmes qui piquent à l'aiguille, ou tricotent des fils pour en faire des tissus de structures infiniment variées”*, il s'est -quant à lui- nourri de “*tous les jeux mathématiques, tout ce qui touche à l'arithmétique*[42]”.

INDICES SELON LESQUELS LES MATHÉMATIQUES SONT ADÉQUATES À LA MÉTHODE

Descartes cherchait-nous l'avons vu- *le vrai usage* des mathématiques et il le trouve. Elles sont au cœur de la méthode et ceci est entendu dès que celle-là voit le jour. Les deux textes canoniques d'exposition de la méthode, les *Regulae* puis le *Discours de la*

---

[38]Voir, la même idée dans la note de J.Brunschwig, in G.F. vol.1, note 2, p.92
[39]Règle IV, G.F. I, p.91
[40]Règles V et VI, G.F. I, p.100 et 101
[41]*Discours*, 2eme partie, G.F. 1, p.590.
[42]Règle X, G.F. I, p.127

méthode, abondent en ce sens. L'intuition et la règle d'évidence, la décomposition des difficultés en éléments absolus, la formation des questions plus complexes selon un ordre déterminé, la prise en considération simultanée de toutes les données, bref, les préceptes de la méthode sont à l'œuvre, en Géométrie et en Algèbre, plus nettement qu'en tout autre domaine de connaissance.*"Tout cela s'éclaire encore par le rapprochement des procédés habituels aux mathématiciens,* écrit G. Milhaud en évoquant la Méthode, *[…] et il* (Descartes) *ne doute pas que les procédés qui réussissent si bien en mathématique ne puissent conduire l'homme à la connaissance universelle"*[43].

Le rôle privilégié des mathématiques est souligné dès le début des *Regulae* puisque, nous dit Descartes, la géométrie et l'arithmétique sont fort adéquates à ce *je ne sais quoi de divin* qui constitue, dans l'esprit humain, le domaine où sont déposées les premières *semences de pensées utiles*.

Spontanément d'ailleurs, les mathématiques, même parcellaires et désorganisées, même sous leur masques variés trahissent la présence d'une méthode véritablement féconde. Les anciens l'ont aperçu, qui ne voulaient *"admettre à l'étude de la sagesse personne qui fût ignorant en mathématiques"*[44]. Comme on le sait, Descartes estimait qu'ils avaient tu ce qu'ils connaissaient de cette mathématique *tout à fait différente de l'ordinaire* et, si ce ne fut que bien imparfaitement, la *rude et simple antiquité* a tout de même eu quelques idées vraies en matière de philosophie et de mathématiques.

Nous sommes donc assurés qu'en ces sciences nous trouverons ces étincelles de vérités certaines. La preuve en est que, sans bonne méthode, spontanément, les fruits récoltés en géométrie sont d'ores et déjà remarquables.

Si les domaines de la connaissance sont distingués, si les sciences sont multiples, ce qui est unique est la façon de progresser d'intuitions certaines en déductions assurées, des énoncés les plus simples aux théorèmes les plus composées. Or, cette façon s'examine, se comprend mieux qu'ailleurs dans ces disciplines particulièrement simples et faciles que sont la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre. Le *Discours de la méthode* est organisé autour de cette problématique, au point qu'il est difficile de comprendre comment il peut être si souvent proposé au

---

[43]G.Milhaud, p.68

[44]Règle IV, in G.F., p.95

public sans les *Essais*, et presque toujours sans la *Géométrie* qui pourtant, aux yeux de son auteur, en était l'expression la plus intense.

Aucune autre science n'est en mesure de fournir des exemples aussi évidents et aussi certains. Qu'on ne s'y trompe pas; si cette facilité, cette adéquation, cette exemplarité sauvent cette discipline, elle n'est du reste, qu'une bagatelle, une coutume des arithméticiens et des géomètres pour amuser leurs loisirs en résolvant des problèmes creux[45]. Nous aurons l'occasion de le constater dans le cours de la *Géométrie*, la succession, l'accumulation possible de théorèmes et constructions nouveaux est tenue pour fastidieuse. L'exhibition de cette possibilité suffira, jointe à quelques exemples. La critique (et ce, dès la parution de l'*Essai*) reprochera d'ailleurs à Descartes d'abuser du procédé et de faire passer pour de simples applications, automatiquement déductibles de prémisses bien établies, certains résultats qui n'en découlent pas[46].

La prétention de Descartes n'est donc pas de doter la mathématique de son temps d'un corpus augmenté de connaissances parcellaires, mais d'en produire un tableau unifié. Ce projet annoncé, dans le *Discours de la méthode,* consiste notamment à remplacer les domaines distincts des mathématiques par une théorie unifiée. L'étude de la *Géométrie* sera l'occasion d'évaluer le résultat en rapport à l'objectif proposé.

L'aisance et la certitude, caractéristiques de la mathématique ordinaire, sont l'indice de quelque chose de plus fondamental: un champ d'exercice de la raison, si mal cultivé et produisant de si beaux fruits, doit nécessairement être d'une fertilité exceptionnelle. En l'ordonnant et en le cultivant selon la méthode, que ne manquera-t-on pas d'y récolter! Une foule de résultats nouveaux, de théorèmes inédits, mais surtout, on y découvrira la puissance de la méthode en acte et -du même coup- une mathématique nouvelle, réorganisée, unifiée et structurée. Bien entendu, c'est ce double résultat qui importe, bien davantage que l'accumulation de propositions nouvelles, fussent-elles vraies. L'histoire de ces sciences est marquée par la surestimation de l'objet à connaître et la sous estimation de la fonction de connaissance. "*Faute de s'interroger sur la fonction de connaissance, les scientifiques se sont égarés dans la diversité des objets de connaissance. Le caractère particulier de ce qui était chaque fois*

---

[45]Paraphrase de la Règle IV.

[46]Cf. les critiques de Roberval

connu a occupé le centre et le foyer de la connaissance. On ne s'est plus posé la question de savoir ce qui constitue la connaissance comme telle, ni de comprendre en quoi elle se distingue des autres facultés de l'âme, de l'imagination, de la mémoire…"[47]

Les outils de la méthode vont d'ailleurs être en partie forgés et affutés dans le cours même de la réorganisation du savoir mathématique. Si l'on devait en croire Descartes, c'est en réfléchissant sur les défauts et avantages des parties distinctes des mathématiques, qu'il aurait *"pensé qu'il fallait chercher quelque autre méthode"*. Les exemples les plus pertinents d'intuition sont tirés de cette science (de la géométrie surtout), le fonctionnement et la validité des chaînes déductives y seront rendus manifestes.

"Ces longues chaînes de raisons toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon…"[48].

Voici qui confirmait ce que les *Regulae* nous avaient déjà enseigné, avec parfois plus de détails. Ainsi, ayant déduit qu'il y a même proportion entre 3 et 6 qu'entre 6 et 12 et à nouveau entre 12 et 24 etc., Descartes en infère-t-il *"que les nombres 3, 6, 12, 24, 48 etc. sont en proportion continue: et par là, même si toutes ces choses sont si évidentes qu'elles en semblent presque puériles, je comprends, en y réfléchissant attentivement, de quelle manière s'imbriquent toutes les questions qui peuvent se poser touchant les proportions ou les rapports des choses, et dans quel ordre on doit les examiner: ce résultat à lui seul résume l'essentiel de toute la science de la mathématique pure"*[49].

A. Serfati a souligné l'importance de cette série pour la méthode: *"La règle VI montre qu'on peut expliquer, à la fois, la constitution de l'ordre, sa nature et sa primauté, sur l'exemple d'insertions successives d'une moyenne proportionnelle; et pareillement ces questions corrélatives: composition des natures simples, déduction et intuition, analyse et synthèse […] Descartes calcule, à l'aide de la raison les produits successifs: 6, 12, 24, 48. Le nombre originaire 3 étant reconnu pour cause, les effets successifs sont donc les éléments de la*

---

[47]V. Le Ru, p.45

[48]*Discours*, 2eme partie, G.F. I, p.587

[49]Règle VI, G.F.I, p. 105.

chaîne intermédiaire, tous définis et solidaires (par le biais de la raison) jusqu'à un effet complexe terminal (48). L'exemple pris dans ce sens, illustre très simplement, dans le registre progrédient de la synthèse, comment l'effet découle, à la fois, des causes et de la chaîne des inférences, et comment l'objet terminal est le produit d'un ordre contraignant […] Cependant, pour Descartes, les véritables problèmes sont ceux qui se posent en sens inverse. La situation commune est en fait celle-ci: on ne connaît que l'effet (48, nature composée) et la cause (3, nature simple). Comment remonter à la cause à partir de l'effet? Comment, par le mouvement de l'analyse, retrouver ce qui a été construit et caché, c'est -à-dire résoudre une difficulté en ses éléments simples Or un moyen naturel pour le faire est de tâcher d'insérer un médium, un moyen terme, un pont, entre 3 et 48, nombre intermédiaire qui les relie et les solidarise […] puis d'itérer l'opération […] Cette décomposition par insertion de moyennes proportionnelles successives est un des premiers paradigmes de la théorie de la connaissance chez Descartes […] C'est à partir de lui que la pensée de Descartes s'est formée …"[50].

Le contrepoint est toujours là qui rabaisse l'objet qui a été si haut élevé, "*Considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a que les mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes, je ne doutais point que ce ne fût par les mêmes qu'ils ont examinées [qu'il fallait commencer] bien que je n'en espérais aucune autre utilité, sinon qu'elle accoutumeraient mon esprit à se repaître de vérités, et ne se contenter point de fausses raisons"*[51].

Modestie donc des mathématiques comme science distincte, mais rôle grandiose dans le système. A celles-ci, réorganisées, parées comme il se doit de nous aider à forger les vrais outils de la connaissance certaine. Ainsi en juge F.Alquié selon lequel, *"on voit clairement le sens des quatre préceptes précédents. Ils sont tirés d'une réflexion sur la méthode mathématique, et Descartes espère pouvoir étendre la méthode mathématique à la totalité des sciences"*[52].

CRITIQUES DES DOMAINES MATHÉMATIQUES TRADITIONNELS

Le *Discours de la méthode* dresse un état des lieux:

---

[50]Serfati, 1993, pp.213-214.
[51]*Discours*, 2ème partie, p.588.
[52] G.F. I, note 3, p.587.

“J'avais un peu étudié, étant plus jeune, entre les parties de la philosophie, à la logique, et entre les mathématiques, à l'analyse des géomètres et à l'algèbre, trois arts ou sciences qui semblaient devoir contribuer quelque chose à mon dessein. Mais, en les examinant, je pris garde que, pour la logique, ses syllogismes et la plupart de ses autres instructions servent plutôt à expliquer à autrui les choses qu'on sait, ou même, selon l'art de Lulle, à parler sans jugement, de celles qu'on ignore, qu'à les apprendre [...] Puis, pour l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites, et qui ne semblent d'aucun usage, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination; et on s'est tellement assujetti, en la dernière, à certaines règles et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur, qui embarrasse l'esprit au lieu d'une science qui le cultive. Ce qui fut cause que je pensai qu'il fallait chercher quelque autre méthode, qui, comprenant les avantages de ces trois, fut exempte de leurs défauts”[53]. Ainsi, les mathématiques n'ont pu, jusqu'ici fournir que des traces de ce qu'elles recèlent.

Critique de la logique formelle

La logique se donne pour autonome, pour une discipline particulière se situant en dehors et au dessus de toute connaissance. Elle a deux défauts particulièrement rédhibitoires. Elle tend à substituer la pensée machinale à la pensée vivante, en ce sens *“les formes du syllogisme n'aident en rien à percevoir la vérité”*[54]. Ce premier procès est souvent et longuement instruit par Descartes: par la syllogistique, on ne peut -au mieux- que se convaincre, ou convaincre les autres, d'une vérité. Ce n'est pas rien, c'est une voie qui permet de progresser dans l'exposition du certain, mais ce n'est en aucune façon un moyen de découverte et donc de production de vérité.

Autant dire que -seule, autonome- cette science est creuse, ou dangereuse puisqu'elle tourne à vide. Le traitement proposé est assez simple: il convient de plonger les méthodes assurées du syllogisme au sein d'une activité intellectuelle vivante, productrice d'objets de connaissance.

[53]*Discours,* G.F. I, pp.585-6
[54]Règle XIV. Voir aussi la Règle X.

Nous éviterons et corrigerons du même coup le second défaut de la logique -science autonome- qui la rend néfaste: "*C'est pourquoi, ayant ici pour principal souci d'éviter que notre raison ne reste en chômage le temps que nous recherchons la vérité sur quelque sujet, nous rejetons ces trop fameuses formes d'argumentation comme contraire à notre propos, et nous recherchons bien plutôt tous les auxiliaires qui peuvent maintenir qui peuvent maintenir notre pensée à l'état d'attention, comme il sera montré dans ce qui suit. Mais pour qu'il apparaisse avec plus d'évidence que cette méthode de raisonnement n'est d'aucune utilité pour la connaissance de la vérité, il faut remarquer que les dialecticiens ne peuvent former aucun syllogisme en règle qui aboutisse à une conclusion vraie s'il n'en ont pas eu d'abord la matière, c'est-à-dire s'ils n'ont pas auparavant connu la vérité même qu'ils déduisent dans leur syllogisme. D'où il ressort qu'eux-mêmes n'apprennent rien de nouveau d'une telle forme; que par suite la dialectique ordinaire est tout-à-fait inutile pour ceux qui veulent chercher la vérité, et ne peut servir qu'à pouvoir quelquefois exposer à d'autres plus facilement des raisons déjà connues*" [55].

La logique formelle met l'entendement en vacances, en sommeil, en chômage, alors qu'un des secrets de la méthode réside dans l'exercice, l'entraînement de celui-ci. Le remède est donc aussi simple que radical, ainsi qu'il a été désigné par Y. Belaval qui écrit que *"l'intuition continuée* (à l'œuvre en mathématique) *dégage un ordre des raisons qui n'apparaissait pas avec la logique commune: sa logique est une mathématique appliquée"*[56].

Les règles du syllogisme ne sauraient surpasser, ou masquer les deux seuls actes de connaissance vraie que sont l'intuition et la déduction. Or, il n'y a pas d'intuition qui soit le moindrement séparée de son objet et pas non plus de déduction qui puisse s'en éloigner beaucoup. Les chaînes de raisons que l'on constitue si bien en mathématique invalident la logique formelle, comme science séparée. La logique du syllogisme laisse alors place à une logique vivante, celle de l'analyse qui *"montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée, et fait voir comment les effets dépendent des causes; en sorte que, si le lecteur la veut suivre, et jeter les yeux soigneusement sur tout ce qu'elle contient, il n'entendra pas moins*

[55]Règle X, G.F.I, pp.129-130
[56]Y. Belaval, p.38.

parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne que si lui-même l'avait inventée"[57].

Critique de la géométrie classique

Dans la *Géométrie*, il sera question, souvent en référence à des insuffisances signalées chez les anciens, de problèmes, de lieux et de courbes. Si la géométrie des anciens recouvre une longue période (d'Euclide à Proclus au moins) au cours de laquelle les pratiques ont évolué, on peut cependant observer quelques constantes.

Les grandeurs de la géométrie qui ne sont ni angles ni nombres, sont d'abord de dimension un pour les lignes, deux pour les surfaces et trois pour les corps ou solides. Ceci est conforme au traité *Du ciel* dans lequel Aristote affirme que *"des grandeurs, celles en une dimension sont les lignes, en deux les surfaces, en trois, des corps* "[58].

L'objet fondamental de la géométrie grecque est la figure avec ses éléments constitutifs (ligne, surface, angle…). Les figures de base sont le cercle, les figures rectilignes (trilatères, quadrilatères, multilatères) et les figures solides (Pyramides, prismes, sphères, cônes, cubes et les autres polièdres réguliers).

Ainsi, on dispose de figures planes et de figures solides. A ces figures, on doit ajouter celles qui sont obtenues par sectionnement comme le segment de cercle, les secteurs circulaires, les lunules, les segments de sphères, les pyramides tronquées, le tronc de cône…avec une certaine généralisation chez Archimède et Héron.

Les problèmes de cette géométrie sont essentiellement de trois types: la construction d'une figure satisfaisant à certains critères, la section d'une figure selon un rapport donné et la détermination de points d'après une propriété fournissant une solution (en général un objet comme un rectangle, un prisme, un angle). Une propriété unique pour une famille d'objets déterminant alors un problème de lieu. On aurait du mal a reconnaître ici notre moderne conception du lieu géométrique (ensemble de points partageant une même propriété et constituant telle courbe ou surface). Un point n'est pas un élément d'un tel lieu, un point n'appartient pas à un lieu; on dira plutôt qu'il occupe

---

[57]Réponses aux secondes objections, G.F. II, p.582. voir aussi la *Règle X,* A.T., 405-406.

[58]*Du Ciel*, 268 a 7-8.

un lieu, même s'il est vrai qu'un théorème de lieu recouvre une infinité de cas. Le 'problème de Pappus', fort ancien relève de ce type là.

Avec la question de la classification des lignes, nous entrons dans des problèmes plus délicats. Le critère inévitable est d'abord une opposition - extra ou méta géométrique- entre le droit et le non-droit: circonférence de cercle / ligne droite, disque / figure plane, sphère / solide rectiligne. Cette opposition suggère en outre des lignes mixtes, comme la spirale ou l'hélice.

Les coniques dont Apollonius expose la génération (et non la définition) par section de cône sont en général des lignes (et non des figures) dont l'introduction exige une “excursion dans l'espace”, puisqu'il faut un cône sectionné pour les exhiber.

De ceci ressortent des arguments sérieux pour nier, contrairement à ce que des historiens (comme Paul Tannery) ont défendu, qu'il y ait eu un concept général de courbe chez les anciens. L'objet étudié est la ligne et la notion de courbe serait en fait un accident de la ligne. On chercherait donc en vain une classification des courbes dans l'analyse des anciens[59].

Les problèmes ont de ce fait été classés selon les lignes grâce auxquelles ils pouvaient être résolu et de fait, dans la classification transmise par Pappus, on en distingue trois sortes: les problèmes plans, résolubles grâce aux droites et circonférences de cercles, les problèmes solides résolubles grâce à une ou plusieurs sections coniques et les problèmes linéaires, résolubles grâce à des lignes plus complexes, comme les spirales, quadratrices, conchoïdes ou cissoïdes.

Lorsque celui-ci reproche aux anciens de n'avoir pas véritablement reçu les courbes dans leur géométrie, il a raison; mais c'est surtout dans la mesure ou un tel programme d'étude (étude intrinsèque des courbes comme objets déterminés) n'était pas, pour eux, à l'ordre du jour.

De la géométrie des anciens, on connaît surtout des traités synthétiques. Il sera donc nécessaire d'avoir à l'esprit ce que Descartes entend lorsqu'il évoque *l'Analyse des anciens*. C'est d'abord un secret, ce qu'ils n'ont pas exposé: *“Les anciens géomètres avaient coutume de se servir de cette synthèse dans leurs écrits, non qu'ils ignorassent entièrement l'analyse, mais, à mon avis, parce qu'ils en faisaient tant*

---

[59]Telle est la position de Bernard Vitrac, *Espace et Mouvement chez les grecs anciens: les courbes*, exposé à l'I.R.E.M. de Lille, le 27 janvier 1995, com. pers.

d'état, qu'ils la réservaient pour eux seuls, comme un secret d'importance" [60].

On doit en outre écarter de l'*Analyse des anciens* cette mathématique qui prend sa source dans l'arithmétique et dans la manipulation des nombres rationnels. Une des caractéristiques des *Arithmétiques* diophantiennes est d'ailleurs l'absence de référence à toute construction géométrique[61].

C'est donc aux traditions de la géométrie classique de la grande époque grecque que se rattache Descartes.*"Et comment enfin connait-il cette géométrie?* interroge Gaston Milhaud. *En 1588 a paru la traduction par Commandin de la collection Pappus, qui, sous une forme un peu désordonnée, faisait connaître une foule de problème traités par les anciens, et donnait les solutions souvent nombreuses de telle ou telle question: trisection de l'angle, construction de deux moyennes proportionnelles, etc. On y trouvait la description de compas utilisés par tels ou tels géomètres, des lignes auxiliaires qu'ils étaient amenés à tracer, comme la Conchoïde de Nicomède etc. Descartes a lu Pappus dont il citera le nom dans les Regulae (IV^e^ règle), [...]. Il avait certainement lu aussi Clavius. Or la deuxième grande édition de ses ouvrages, datant de 1611, donnait les principaux exemples de l'Analyse des grecs. [...] Dans cette tradition, ce sont des longueurs qu'il faut construire. Ainsi, les racines de l'équation du second degré peuvent d'un côté se calculer par une suite d'opérations qui aboutissent d'ailleurs à des résultats approchés. Chez les grecs, bien qu'ils fussent assurément capables d'effectuer ces suites de calculs, le problème se résolvait par la construction de deux longueurs dont on connait la somme ou la différence et le produit. En particulier, la racine de l'équation $X^2 = 2a^2$ que résout le problème de la duplication du carré, s'obtient, si l'on veut par la suite des calculs fournissant la racine carrée de 2 avec telle approximation que l'on voudra; mais elle se représente aussi, comme Platon le montre dans le Menon, par la diagonale du carré dont le côté est a. Et de même pour les équations cubiques [...] Quand s'est posé à son tour, le fameux problème de la duplication du cube, ils ont tous préféré construire la longueur qui devait être le côté du nouveau cube. ramenant la question à l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre a et 2a, et, renonçant*

---

[60]Réponses aux secondes objections, A.T. IX, 122
[61]Voir, Dahan-Peiffer, pp.79-83.

forcément à le résoudre à l'aide de la droite et du cercle, ils construisaient de nouvelles lignes plus ou moins compliquées devant (quand cela était possible)*servir à déterminer les longueurs cherchées. Et ainsi de suite…Cette science de la quantité continue, qui n'est autre que le Topos analomenon dont parle Pappus, ou plus simplement, comme nous le disons, et comme le disait déjà Descartes, l'Analyse des anciens, est bien celle à laquelle se rattache déjà en 1619 et se rattachera toujours Descartes"*[62].

La géométrie des anciens, science des figures et des lignes à construire, présente donc ce qu'il y a de meilleur allié à un des pires défauts qui puisse faire obstacle à la connaissance.

Le meilleur parce qu'elle se rapporte à ce qu'il y a d'essentiel dans les corps, à savoir l'étendue. Son objet relève de l'examen des dimensions ou à la quantité continue; elle est donc la voie royale vers la vraie mathématique. En ce sens, les mathématiques cartésiennes restent avant tout une géométrie. Nous aurons l'occasion d'y revenir, mais observons dès à présent que les autres domaines mathématiques ne devront pas se détacher des lignes, des grandeurs continues de la géométrie qui, seules, fournissent un contenu aux opérations symboliques. Rappelons cependant le décalage entre les objets géométriques grecs vus par Descartes et ceux qu'ils étudièrent eux-mêmes: là où ils examinaient des lignes utiles ou nécessaires aux constructions de figures et aux résolutions de problèmes, il voit des courbes à connaître pour elles-mêmes et à classer.

Quoiqu'il en soit, la géométrie des anciens se présente comme doublement fautive. D'abord parce qu'elle est morcelée. Comme le rappelle M. Marie *"les courbes qu'avaient étudiées les anciens s'étaient présentées à eux, non pas sans ordre réel, puisque leur invention était née de besoins éprouvés, mais au moins sans ordre appréciable; d'un autre côté, il n'existait aucun lien entre ces courbes, ni aucun moyen d'en établir, de sorte que l'étude de l'une ne pouvait en rien profiter à celle des autres; enfin, leur identité même était loin d'être établie, car une même courbe, un peu compliquée, jouissant d'une infinité de propriétés toutes différentes, comporte par conséquent une infinité de définitions dont la concordance peut souvent être fort difficile à apercevoir"*[63].

---

[62]Gaston Milhaud, pp.45-46.
[63]M. Marie,t.6, pp.5-6.

L'héritage géométrique grec se présentait comme une juxtaposition de zones localement bien explorées, *Les Eléments d'Euclide* avec en particulier la théorie des proportions, l'étude de certaines propriétés des coniques, notamment par Archimède et Apollonius, mais aussi de problèmes non résolus comme les quatre fameuses questions relatives à la constructibilité de lignes à la règle et au compas: la quadrature du cercle, avec son recours à une courbe auxiliaire, dite quadratrice d'Hippias; l'insertion de deux moyennes proportionnelles, avec -là encore- le recours à l'intersection de deux paraboles par Ménechme; la duplication du cube qui, logiquement, se ramène à un problème de moyennes proportionnelle et enfin la trisection de l'angle[64].

En second lieu, la géométrie traditionnelle est *trop astreinte à la considération des figures* et fait la part trop belle à l'imagination strictement reproductive qui ne considère que des images ressemblantes aux objets qui les suscitent. Les figures devront laisser place aux lignes. Figures et lignes, voici qui n'est pas équivalent. L'expérience des anciens est là pour le prouver: la combinaison inévitable des figures est bien vite trop complexe pour que leur seule considération permette de dégager un ordre, un classement des problèmes posés et des critères de recevabilité des résultats suggérés. Les figures de la géométrie des anciens étaient recevables pour la réalité spatiale qu'elles donnaient à voir, ce qui est-en fait- porteur d'obscurité plutôt que de clarté et c'est ce réalisme spatial que Descartes se propose d'abandonner[65]. La réforme doit donc maintenir la géométrie dans le champ de la grandeur continue, c'est-à-dire dans l'étendue mais elle doit immerger ses lignes dans un algorithme général et classificateur.

Cette soumission aux figures réellement spatiales, aux images ressemblantes aux objets donnés ou produits, met la géométrie sous la dépendance de l'imagination. Voilà pourquoi son domaine est si restreint! Concevoir et imaginer sont deux opérations bien distinctes. Si l'imagination peut être un auxiliaire de l'esprit en le dirigeant vers une chose purement intelligible, elle peut tout aussi bien brider l'exercice de l'entendement si celui-ci lui reste soumis. L'exemple du chiliogone,

---

[64]On verra, lors du commentaire du livre troisième, p.*nnn,* comment Descartes reclasse ces problèmes en problèmes plans.

[65]Voir Vuillemin, p.139.

évoqué au début de la sixième méditation nous le rappelle. Si je ne puis imaginer ses mille côtés, je peux concevoir à la vérité que c'est une figure composée de mille côtés aussi facilement qu'un triangle est une figure à trois côtés. L'imagination est donc un auxiliaire précieux, qui stimule et donne occasion à mon esprit d'exercer sa puissance de raisonnement.

Critique de l'algèbre des modernes

L'algèbre est alors cette science qui fait avec des lettres, les calculs réputés valides sur les nombres. Descartes n'est pas l'inventeur de l'algèbre, loin s'en faut et d'ailleurs, il n'a jamais prétendu l'être[66]. Un tableau bref et précis du paysage algébrique dans lequel évolue Descartes a été peint par Jean Itard et nous ne saurions mieux faire que de le résumer ici:

"Les mathématiques modernes prennent un timide départ vers la fin du XV^e^ siècle avec Regiomontanus, [...] Luca Pacioli, [...] ou Nicolas Chuquet, [...]. Ces mathématiciens commencent à faire quelque confiance aux procédés encore rudimentaires de l'algèbre, alors branche bien modeste de l'art du calcul, ensemble de recettes stéréotypées permettant la solution de certains types de problèmes numériques.[...] Leurs successeurs du XVI^e^ siècle, singulièrement les italiens Cardan, Tartaglia et Bombelli les suivront dans cette voie [...] et résolurent les équations des troisième et quatrième degrés.

Cependant, et cela d'une façon indépendante de cette découverte, la notation algébrique faisait des progrès considérables, d'une part avec Chuquet, d'autre part, en Allemagne, avec C.Rudolff, puis Stifel. [...] Stifel adopte en plus une notation littérale permettant de représenter non plus une seule, mais plusieurs inconnues. Mais, lorsque Viète, à la fin du siècle, désigne données et inconnues géométriques par des lettres sur lesquelles il effectue tous les calculs

---

[66]La sévère remarque de Leibniz: «*Ceux qui sont assez entrés dans l'intérieur de l'analyse et de la géométrie savent que Descartes n'a rien découvert de conséquence dans l'algèbre, la spécieuse en elle-même étant de Viète, les résolutions des équations cubiques et quarrées-quarrées étant de Scipion du Fer et de Louys de Ferrare, la genèse des Equations par la multiplicité des équations égales à rien étant d'Harriot Anglais, et la méthode des tangentes ou de Maximis et de minimis étant de M.Fermat, de sorte qu'il ne lui reste que d'avoir appliqué les équations aux lignes de géométrie des degrés supérieurs, que Viète, prévenu par les anciens, qui ne les tenaient pas pour assez géométriques, avaient négligés"*, Gerhardt, Phil. Sch., IV, 347.

de sa Logistique Spécieuse, lorsqu'il distingue, dans l'Analyse trois parties: la Zététique qui met en équation, la Poristique qui se place au niveau du calcul littéral, transforme et discute les équations, l'Exégétique ou Rhétique qui revient au domaine de départ arithmétique ou géométrique, et énonce la solution définitive avec les calculs ou les constructions qu'elle implique, alors, les Mathématiques modernes peuvent être considérées comme fondées"[67].

Descartes s'est attaché à nier avoir subi une quelconque influence des algébristes modernes, en particulier de Viète[68]. Il est difficile de lui accorder un crédit total et on peut au contraire se demander s'il n'a pas voulu escamoter une dette importante à leur égard. Il est d'autre part presque impossible de ne pas relever ici ou là des références précises à *L'arithmétique de Simon Stevin* parue à Leyde en 1585 et rééditée en 1625[69].

Les avantages que Descartes accorde à l'algèbre des modernes sont connus. Cette "espèce d'arithmétique soulage l'imagination" et aide à connaître les difficultés qui sont cachées par la confusion des nombres. Les reproches qu'il adresse à cette discipline sont cependant de taille.

1) Les notations sont encore confuses et lourdes; il reviendra à Descartes d'en proposer une réforme qui sera une *"heureuse synthèse de ce qu'il y a de meilleur dans chacune des notations antérieures, emploi des lettres pour les données et les inconnues, préférence*

---

[67]Jean Itard, p.9

[68]La polémique entre Descartes et ses détracteurs fut rude, nous n'en donnons que deux échantillons."*Tant s'en faut que les choses que j'ai écrites puissent être aisément tirées de Viète, qu'au contraire, ce qui est cause que mon traité est difficile à entendre, c'est que j'ai tâché à n'y rien mettre que j'ai cru n'avoir point été su, ni par lui, ni par aucun autre. […] Et ainsi j'ai commencé là où il avait achevé…" A Mersenne,* décembre 1637, A.T. I, 478-9. Les accusations de plagiat par J. de Beaugrand furent immédiates, précises et virulentes: *"On aurait eu de l'obligation au Sieur Descartes, s'il eut inventé, par sa méthode, les belles choses qui étaient dans l'œuvre dont Mr Viète fait ici mention. Mais sans doute il n'en a point d'autre que celle de discuter et de déguiser, du mieux qu'il peut, ses larcins ainsi que m'ont avoué les meilleurs esprits qui ont eu la patience de lire son livre […] Je pourrais continuer aisément à vous montrer d'autres larcins de ce Méthodique impertinent* Voir, J. de Beaugrand, *A Mersenne*, mars 1638, in *Correspondance Mersenne*, Paris, CNRS, t.VII, pp.87-103.

[69]Voir les notes de P.Costabel et de J.L. Marion sur ce point, in Descartes, *Règles utiles et claires…*, pp.153-4.

accordée aux minuscules latines, utilisation des exposants de Chuquet"[70].

2) De nombreux résultats concernants la résolution des équations manquent encore; en particulier l'examen des conditions dans lesquelles un polynôme est décomposable ou non dans le corps de ses coefficients. La théorie des équations et des racines des polynômes est, à ses yeux, cultivée au hasard et sans ordre.

3) Surtout, l'algèbre ordinaire est toute dépendante d'une idée particulièrement pauvre de la dimension. Idée pauvre et contraignante en vertu de laquelle les algébristes ne peuvent manipuler des racines, des carrés ou des cubes sans les associer à la longueur, à la surface ou au volume, considérés comme trois espèces de grandeurs. La critique et les axes de la réforme sont exposés dans la règle XVI, où, écrit Descartes, *"ces noms* [racine, carré, cube, bicarré…] *m'ont trompé moi-même, je l'avoue pendant longtemps: car il me semblait que rien de plus clair, après la ligne et le carré, ne pouvait se proposer à mon imagination que le cube et les autres figures construites à l'image de celle-ci […] Mais après beaucoup d'expériences, je finis par m'apercevoir qu'avec cette façon de représenter les choses, je n'avais jamais rien découvert que je n'eusse pu reconnaître sans elle avec bien plus de facilité et de distinction; et qu'il me fallait entièrement rejeter les termes de ce genre, sous peine de rendre confuse la représentation, attendu qu'une grandeur, même si on l'appelle cube ou bicarré, ne doit jamais se proposer à l'imagination sous une autre forme que celle d'une ligne ou d'une surface* (seconde possibilité qui sera évacuée par la suite)*, conformément à la règle précédente"*[71].

La représentation de toutes les dimensions, toutes les puissances par des lignes surclasse définitivement l'"Algèbre des modernes". Or, cette représentation est possible parce que la dimension n'est autre chose que le mode sous lequel un sujet est mesurable et toutes les quantités peuvent être réduites à la longueur, selon une méthode qui sera exposée dans les premiers paragraphes de la *Géométrie*.

[70]J. Itard, p.9.
[71]Règle XVI, G.F.I, pp.187-188.

3. MATHESIS ET *GÉOMÉTRIE*, CHANGEMENT DE PROGRAMME ?

UN NOUVEAU PAYSAGE MATHÉMATIQUE À CONSTITUER

L'algèbre et la géométrie, même telles qu'elles furent pratiquées par les anciens recèlent des trésors méthodiques, c'est entendu, et on a parfois le sentiment que là est leur seul usage. Tel n'est cependant pas le cas. Sinon, pourquoi ne pas s'être contenter, pour se *repaître de vérités*, pour contempler des *chaînes de raisons* des *Eléments* d'Euclide[72]? Sans doute est-ce parce que l'usage des mathématiques ne se réduit pas à leur productivité méthodique mais qu'il s'étend à la constitution possible d'un contenu de savoir qui n'est pas négligeable. Le contenu de savoir ultimement visé par la méthode est bien entendu la *Mathesis universalis*, mais la *Mathesis* est bien plus vaste que les secteurs séparément explorés par les mathématiciens et même que leur réunion, c'est la science des relations quantitatives, qui règne sur toutes les sciences des quantités particulières (géométrie, arithmétique, algèbre, astronomie, musique, optique, mécanique etc.). La constitution d'un domaine unifié et ordonné des diverses branches des mathématiques est toutefois un objectif intermédiaire important ou même nécessaire du projet général. Important comme argument en faveur de la possibilité de constitution d'une telle science générale, nécessaire comme 'terrain d'entraînement' concernant les sciences les plus faciles, celles où les notions premières sont claires et distinctes. *"Car il y a cette différence que les premières notions qui sont supposées pour démontrer les propositions géométriques, ayant de la convenance avec les sens, sont reçues facilement d'un chacun; c'est pourquoi il n'y a point de difficulté, sinon à bien tirer les conséquences…"* alors qu'en métaphysique, *"la principale difficulté est de concevoir clairement et distinctement les premières notions"*[73].

En rester à Euclide interdit d'aller bien avant dans cette science générale des grandeurs continues. Il faudra imaginer et réaliser le rapprochement de la géométrie et de l'algèbre pour faire rendre aux mathématiques ce qu'elles enferment réellement. *"Et voilà donc alors ce qui fait aux yeux de Descartes le prix de l'analyse des anciens et de l'algèbre. Elles ne vont pas seulement lui donner les procédés extérieurs de la méthode, lui offrir l'exemple édifiant de longues*

---

[72]C'est d'ailleurs une question que pose G.Milhaud, p.68.

[73]Descartes, *Méditations*, AT. IX, p.122.

chaînes de raisons toutes simples et faciles […] Elles contiennent en outre, comme un noyau qu'elles enveloppent, le commencement de la véritable science, à savoir la science des relations quantitatives".[74]

Il ne suffit pas de profiter des figures et des nombres, de leurs arrangements déductifs aussi variés qu'assurés pour montrer le rôle d'un principe premier, pour pointer et contrôler une chaîne déductive, il faut encore -et c'est un vaste programme- réorganiser la mathématique elle-même, discipliner l'arrangement de son costume en désordre. L'état présent est tel que la stérilité menace, que les fonctions de l'entendement s'y mêlent, que- bien entendu- la vraie méthode y transparaît de moins en moins.

"Aussi ne m'étonnais-je point que la plupart des hommes, même de ceux qui sont intelligents et cultivés, eussent pour coutume, après avoir pris quelque teinture de ces sciences, de se hâter de les négliger comme étant puériles ou creuses, ou, au contraire de s'effrayer dès le seuil à l'idée d'en poursuivre l'étude, comme étant extrêmement difficiles et embrouillées"[75].

Nous aurons l'occasion d'y revenir, mais ayant évoqué Euclide, il est juste de dire qu'en ses *Eléments* se trouve toutefois le joyau des joyaux, le langage de la science des grandeurs, c'est-à-dire la théorie des proportions.

Il faudra donc libérer la géométrie de la représentation imaginaire. Nous le verrons, c'est le but de la méthode essentielle présentée au début du livre I de la *Géométrie*, qui doit permettre de ramener les figures à des considérations de lignes, et même de lignes droites pour, ensuite, les connaître par la mise en évidence des rapports qu'entretiennent ces lignes. Cette méthode devra d'ailleurs réduire -du même coup- le premier défaut majeur de la géométrie des anciens, à savoir son désordre- L'examen, le classement des rapports de lignes offrira le critère d'ordre et d'unité de la géométrie: des rapports les plus simples aux plus complexes. La connaissance des rapports simples éclairera, permettra celle des rapports plus complexes pour ainsi parcourir toute la géométrie.

Alors, mais alors seulement, l'apport des anciens pourra être pris en compte, au fur et à mesure des besoins. Leurs découvertes ne sont pas négligeables et elles sont vraies. Aussi Descartes n'a-t-il pas besoin de

---

[74]G.Milhaud, p.68
[75]Règle IV, G.F.I, p.95

rédiger une géométrie dans laquelle, les propositions euclidiennes, les propriétés des coniques d'Apollonius, la théorie des proportions etc. doivent être redémontrées. Elles prendront place comme des pièces, déjà découpées d'un puzzle dont l'organisation générale est enfin proposée. *"En ce sens*, écrit J.L. Marion, *la méthode entreprend une manière de récupération en certitude des inventions hasardeuses"*[76].

L'idée de rapporter les objets des mathématiques à des lignes réclame bien sûr l'ouverture d'un autre front qui concerne les règles d'utilisation de ces lignes. *"Ayant pris garde que, pour les connaître, j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en particulier, et quelquefois seulement de les retenir ou de les comprendre, plusieurs ensemble, je pensais que, pour les considérer mieux en particulier, je les devais supposer en lignes, à cause que je ne trouvais rien de plus simple, ni que je pusse plus distinctement représenter à mon imagination et à mes sens; mais que, pour les retenir, ou les comprendre plusieurs ensemble, il fallait que je les expliquasse par quelque chiffres, les plus courts qu'il serait possible, et que, par ce moyen, j'emprunterais tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre, et que je corrigerais tous les défauts de l'une par l'autre"*[77].

L'algèbre est bien entendu, ici convoquée.

Supposons, à ce stade que soit résolue la manière de réduire les figures à des lignes, ce qui sera examiné au début du livre I de la *Géométrie*. Cela ne suffit évidemment pas à corriger les défauts de la géométrie par la puissance de généralisation de l'algèbre puisqu'un obstacle de taille se présente aussitôt: l'algèbre est une notation et un ensemble de règles de transformations surtout adaptés aux nombres. Elle est comme une arithmétique générale et en ce sens précis elle n'est pas au centre des préoccupations cartésiennes. En tant qu'arithmétique générale, l'algèbre est même inutilisable, inadéquate au programme. Il convient donc de dissocier cet algorithme, ainsi que les notations qui l'accompagnent de la notion de nombre. Les lettres sur lesquelles s'effectueront les calculs et les transformations ne désigneront pas des nombres, des mesures mais des longueurs de lignes.

Les objets habituels de l'algèbre doivent céder la place, mais les enchaînements, les règles de calcul doivent absolument être conservés. La certitude des procédures algébriques, issue de l'arithmétique, doit,

---

[76]Marion, note (2), p.112

[77]*Discours, II*, G.F. I, p.589.

sans dommage, sans altération, continuer de régner lorsque changent la nature des objets désignés par les lettres de cette écriture. Or, ceci n'est pas douteux et les exigences méthodiques sont bel et bien respectées par les procédures algébriques comme le souligne Descartes dès les *Regulae*: "*Par ce système, non seulement nous ferons l'économie d'un grand nombre de mots, mais encore, et c'est le principal, nous rendrons manifeste les termes de la difficulté sous une forme si pure et si dépouillée que, sans que rien d'utile n'y soit omis, on n'y trouvera rien non plus de superflu, et qui risque d'accaparer inutilement la capacité de l'esprit lorsqu'il lui faudra embrasser plusieurs choses à la fois*" [78].

Voici qui peut libérer notre esprit: *«Pour que nous ne soyons pas contraint d'immobiliser une partie de notre attention pour lui rendre sa fraîcheur, tout en vaquant à d'autres pensées, l'art y a très heureusement ajouté l'usage de l'écriture, grâce au secours de cette dernière, nous ne confierons ici absolument rien à la mémoire, et nous préserverons tout entière notre fantaisie libre pour les idées présentes en inscrivant sur le papier tout ce qu'il faudra retenir, et cela par des signes très concis, afin de pouvoir les passer distinctement en revue l'un après l'autre, conformément à la neuvième règle, les parcourir tous ensuite par un mouvement très rapide de la pensée conformément à la onzième, et prendre, du plus grand nombre possible d'entre eux une intuition simultanée*."[79]

N'est-ce pas M.Gilson qui affirmait qu'alors que la science de la renaissance est affaire de mémoire, le mérite de Descartes était précisément de "*faire passer la science de la mémoire à la raison*"[80]. Nous pensons que la traduction symbolique, l'algébrisation de la géométrie participe de ce projet et, pour Descartes, surtout de ce projet. De tout ceci, il faudra retenir qu'il n'y a pas place pour le conflit entre les méthodes et les critères strictement géométriques (qui sont les critères essentiels) et les méthode et critères algébriques (qui sont des aide mémoire).

Ayant posé qu'en géométrie, on devait réduire les figures à des lignes, Descartes leur donne des noms de lettres. Les lettres de la géométrie algébrique ne sont pas des nombres, mais des grandeurs. Le

---

[78] Règle XVI, G.F.I, p.186.
[79] Id.
[80]E.Gilson, p93.

propre de ces grandeurs est d'être constructibles, donc sous la juridiction de la géométrie des courbes et des figures et d'être manipulables selon les règles de l'algèbre spécieuse. Voici en quoi l'algèbre, chez Descartes, ne tend pas à devenir une discipline autonome et aussi pourquoi la géométrie des courbes et des figures est sous le contrôle du calcul. C'est parce qu'elles sont exprimables dans des rapports algébriquement réglés que les lignes sont reçues dans la géométrie. Le rêve ou plutôt la conviction de Descartes est que ces deux critères de réception au sein d'un savoir assuré, être constructibles exactement et être exprimables algébriquement, s'avèrent n'en faire qu'un. Nous y reviendrons au cours de l'examen de *La géométrie* pour voir alternativement fonctionner l'un et l'autre.

Cette algèbre fermement tenue en bride par la géométrie a été clairement décrite par Y.Belaval qui nous fait observer que *"l'algèbre n'intéresse Descartes qu'en géomètre […] il ne s'attache à l'algèbre que pour résoudre des problèmes de géométrie"*[81]. Ce n'est pas la remarquable maîtrise cartésienne des techniques de calcul algébrique qui le mettra sur la voie d'une mathématique du nombre. Nous le verrons, le nombre-roi est l'unité, en tant qu'objet indispensable pour combiner les grandeurs continues selon les règles du calcul. A ces grandeurs ne sont pas associés de nombres, notamment car il eût fallu disposer d'un ensemble numérique pouvant épouser le continu. Voilà pourquoi, si l'algèbre limite la géométrie, la géométrie limite aussi l'algèbre comme l'a affirmé Belaval[82]. Il nous semble même que, du point de vue de l'histoire des mathématiques, cette limitation en retour est plus stricte et plus contraignante que la première, ainsi que l'observera Leibniz.

LA THÉORIE DES PROPORTIONS

On ne saurait trop insister sur une idée directrice de la mathématique cartésienne. Le cœur de la géométrie algébrique est la théorie des proportions. Les modalités nouvelles en sont les notations, la puissance de généralisation, mais les règles de transformation, de simplification, les opérations autorisées ressortent de cette théorie eudoxo-euclidienne. Il le répète, depuis les *Regulae*, jusqu'à la *Géométrie*, la mise en équation d'un problème géométrique, sa

[81]Belaval, p.287
[82]Ibid., p.286

résolution ne consistent en rien d'autre qu'en l'application de cette ancienne théorie: *“[Les diverses sciences dites mathématiques] s'accordent toutes en ce qu'elles n'y considèrent autre chose que les divers rapports et proportions qui s'y trouvent”*[83].

La règle VI expose de même *le principal secret de la méthode* sous couvert de l'étude d'une proportion simple d'abord, puis, grâce à ce premier résultat d'une proportion qui mène à un problème du second degré, puis du troisième etc. La règle XIV est catégorique qui nous dit encore :*“concluons donc avec assurance et résolution que les questions parfaitement déterminées ne contiennent à peu près aucune difficulté, sinon celle qui consiste à développer les proportions pour en faire des égalités et tout ce en quoi se rencontre précisément cette difficulté, peut aisément, et doit nécessairement être séparé de tout autre sujet et ensuite être transposé dans l'étendue et sous forme de figures*".

Il est difficile d'être -à cet égard- plus catégorique que Jules Vuillemin lorsqu'il écrit *“Beaucoup plus qu'une théorie du parallélisme entre fonctions et courbes, la* Géométrie *est d'abord une conception des proportions”* et ce n'est certes pas une vue locale de la méthode puisque, si l'on suit toujours Vuillemin, *“aux yeux du philosophe, l'invention de la géométrie analytique paraît secondaire par rapport à l'invention d'une méthode universelle de pensée, contenue […] dans la théorie générale des proportions“*[84]. L'examen de la *Géométrie* ne fera -à nos yeux- que confirmer ce jugement sur lequel insiste encore Vuillemin en étudiant la solution cartésienne du problème de Pappus: *“Or, quoiqu'il innove par ailleurs, Descartes continue de poser le problème de Pappus dans les termes des anciens, c'est-à-dire en termes de proportions[...] Il y a sur ce point, un entier accord entre la* Géométrie *et les* Règles pour la direction de l'esprit, *ainsi qu'avec toutes les œuvres ultérieures de Descartes: la nouvelle Géométrie se réduit à cette théorie des proportions”*[85].

DES REGULAE À LA GÉOMÉTRIE

C'est précisément en reconnaissant la place de la théorie des proportions que l'on peut sans doute aborder le problème des relations entre les *Regulae* et la *Géométrie*. Parce que la grande théorie des

---

[83]*Discours*, 2ème partie, G.F. I, p.588
[84]J.Vuillemin, p.10
[85] Ibid., p.112

rapports est au centre des expressions programmatiques cartésiennes. Les *Regulae* nous l'ont indiqué, les choses connaissables, dans leur plus grande généralité, se parcourent selon l'ordre des rapports. Ainsi la théorie des proportions est-elle la pièce maîtresse de la *Mathesis universalis*. D'autre part, la théorie des proportions est le moyen par lequel la géométrie peut devenir algébrique, ce qui permet à la science mathématique d'être unifiée.

Si on reconnait un noyau commun -identique- au projet scientifique exposé dans les *Regulae* et au traité de 1637, la question demeure de savoir dans quelle mesure celui-ci est la réalisation de celui-là? Etablir une science universelle -ce qui est l'objet des *Regulae*- et unifier les domaines jusqu'ici distincts des mathématiques constitue-t-il un même projet? Sans doute non. Bien des auteurs ont reconnu dans les *Regulae* le premier et dans la *Géométrie*, la réalisation (discutée) du second. Ainsi l'*Essai* de 1637 serait un renoncement, l'abandon du programme visant à établir la science de toutes les choses accessibles à l'entendement humain.

LA MATHESIS, PROJET INAUGURAL

Il faut donc prendre la mesure de ce que vise Descartes par la *Mathesis universalis*. Dans la lettre qu'il écrit, le 26 mars 1619 à son ami Beeckmann, il lui confie l'idée qu'il a d'*“une science aux fondements nouveaux, permettant de résoudre en général toutes les questions que l'on peut se proposer en n'importe quel genre de quantité, tant continue que discontinue, mais chacune selon sa nature [...] Projet incroyablement ambitieux”*[86].

Cette même année 1619, l'année des trois songes, il est certain que de vastes projets et des découvertes significatives enthousiasment le jeune philosophe. Il est toutefois difficile de se faire une idée précise de leur nature exacte. Foucher de Careil y voit, non pas tel aspect de la méthode, mais la méthode cartésienne intégrale qui peut s'appliquer à toutes les choses intellectuelles[87], Millet estime qu'il s'agissait des fondements de la méthode et de son Analyse[88], Liard juge qu'il s'agit de la Méthode et peut-être aussi de la Mathématique universelle, Hamelin voit, dans la Méthode la conception, avant Leibniz d'une sorte de

---

[86]*A Beeckmann*, G.F. I, pp.38-39

[87]Foucher de Careil, Introduction.

[88]*Descartes avant 1637*

caractéristique universelle[89] et C. Adam, plus circonspect reconnait que *"nous n'avons que l'embarras du choix: mathématique universelle, ou bien réforme de l'algèbre, ou bien expression de toutes les quantités par des lignes, et des lignes elles-mêmes par des caractères algébriques…"*[90].

G.Milhaud a précisément repris les données du problème pour parvenir à un tableau qui nous paraît convaincant. Il réinsère des travaux décisifs de mathématiques dans le mouvement de maturation qui mène Descartes à la découverte de la Méthode: *«Assez de temps s'écoula entre la première résolution de Descartes et la découverte de sa méthode. Nous le voyons d'ailleurs, d'après son récit, pendant une période plus ou moins longue de recherche, scruter quelques-unes des parties de la philosophie et des mathématiques qui pourraient peut-être lui servir, la Logique, l'Analyse des géomètres, l'Algèbre. L'examen qu'il en fait, les remarques qu'elles lui suggèrent aboutissent à cette conclusion qu'aucune des trois ne convient pour la méthode qu'il cherche, mais que celle-ci pourrait profiter de leurs avantages, après quoi, il est conduit à énoncer les quatre règles que contient le Discours. Armé de ces principes, Descartes tourne sa pensée du côté des mathématiques: il conçoit ce qu'il appelle sa Mathématique universelle, est amené à représenter par des lignes ce que nous appellerions aujourd'hui les fonctions simples, et à réformer à l'aide de lettres et d'exposants l'écriture algébrique"*[91].

Le temps de maturation passé, la *Mathesis universalis* est exposée dans les *Regulae*. *"Cette science doit, en effet contenir les premiers rudiments de la raison humaine, et s'étendre jusqu'à faire surgir des vérités de n'importe quel sujet"* nous apprend la Règle IV qui précise un peu plus loin *"qu'il doit y avoir une science générale qui explique tout ce qu'il est possible de rechercher concernant l'ordre et la mesure; et que cette science s'appelle, non d'un nom d'emprunt, mais d'un nom déjà reçu par l'usage, la mathématique universelle puisqu'elle contient tout ce en vertu de quoi l'on dit d'autres sciences qu'elles sont des parties de la mathématique. Combien maintenant elle l'emporte, et en utilité, et en facilité, sur les autres sciences qui lui sont subordonnées,*

---

[89]*Le système de Descartes*, pp. 43-44
[90]Adam, A.T., t.XII, p.49
[91]G.Milhaud, p.61.

on le voit aisément au fait qu'elle s'étend aux mêmes objets que celle-ci et en outre à bien d'autres"[92].

Descartes ajoute qu'il a déjà poussé l'étude de cette science assez loin et qu'il va donner les grandes lignes des résultats obtenus. Suivent les règles de la méthode.

LES QUESTIONS PARFAITEMENT POSÉES DE LA "GÉOMÉTRIE"

Les mathématiques -nous l'avons déjà aperçu- sont à la fois la preuve qu'une telle science universelle existe et elles en sont des masques ou parures. La géométrie, l'arithmétique et d'ailleurs aussi la logique sont *le revêtement, plutôt que les parties constituantes*[93] de la seule science qui vaille vraiment. Le projet cartésien ne consiste pas à montrer nue cette science, mais à la *parer, de manière à la pouvoir mieux accommoder à l'esprit humain*[94]. La *Mathesis universalis* étant purement intellectuelle, *elle s'habille de figures et de nombres, sortes de tributs payés à l'imagination, pensée ici comme l'auxiliaire de l'esprit"*[95].

Il y a précisément là une articulation entre la *Mathesis Universalis* et les mathématiques, même réorganisées. La première s'avance masquée car elle est, dans son essence, purement intellectuelle et abstraite et ce n'est pas elle qui est soumise à notre réflexion mathématicienne, mais plutôt ses masques et parures que l'on reconnaîtra dans les questions parfaitement posées, que sont justement la géométrie et l'algèbre. Mais alors, ces sciences apprêtées sous un voile qui révèle, se laissent examiner par la raison aidée de l'imagination.

Si donc, on peut sauver les parures (figures et nombres) de la stricte vanité, encore faut-il rendre manifeste qu'elles sont parures d'un savoir autrement plus considérable que celui que constitue leurs propres énoncés. Voilà encore pourquoi on rencontrera toujours un Descartes impatient lorsque les propositions, les cas divers et particuliers semblent prétendre à l'exposition après qu'un résultat

---

[92]Règle IV, G.F.I, pp. 98-99. Nous partageons les préventions de J.L. Marion à traduire par 'Mathématiques universelles', le latin *Mathesis Universalis*. Cf. Marion, (34), p.160.

[93]Règle IV, G.F.I, p. 94

[94]Id., p.94. C'est toute la règle IV qu'il faudrait citer tant y est clair l'exposé du diagnostic et l'idée de la térapheutique adéquate.

[95]V.Le Ru, *Les fondements du mécanisme cartésien…*, nov.1994, com. pers., p. 45.

général ait été exposé. *J'en ai déjà assez dit...je m'ennuie à en écrire tant...vous aurez le plaisir des choses qui s'ensuivent* etc. Telles sont les expressions qui scandent la *Géométrie*.

On ne cherchera pas à ôter le masque, le vêtement, mais il est de la plus haute importance de le reconnaître pour tel sous peine de n'avoir pour seul et unique objet que le drap d'un ectoplasme, au lieu de l'apparence sous laquelle se donne à connaître la plus sublime des méthodes d'exercice de l'entendement.

L'examen du plan des *Regulae* permet de préciser les rapports qu'entretiennent la géométrie algébrique et la *Mathesis universalis*.[96] Après l'exposé des préceptes concernant les *propositions simples*, au cours des douze premières règles, vient l'examen des *questions parfaitement comprises* qui fera les douze règles suivantes. Les douze dernières enfin concerneront les *questions imparfaitement comprises*. Cette partie n'a jamais été rédigée, mais il est cependant possible de l'opposer à la partie rédigée (pas complètement d'ailleurs). Celle-ci décrit un programme d'étude et une méthodologie complètement adaptés aux mathématiques, à cette partie de la science générale où les constantes et les variables, les prémisses et conclusions, les termes connus et inconnus sont si clairement identifiées qu'il peut y avoir mise en équation du problème.

La place considérable des figures et de l'algèbre dans les neuf règles rédigées de cette partie est donc inévitable puisque les questions parfaites ne se présentent guère qu'en arithmétique et en géométrie. L'auteur signale toutefois que le *passage* par cette partie de la méthode est nécessaire pour parvenir au suivant. Le suivant justement devait concerner des sciences où les questions n'étaient pas parfaitement posées, les sciences expérimentales, les sciences de la nature, une partie de la physique (le magnétisme, les sons…).

Le troisième des *Essais* réalise-t-il le programme envisagé dans les *Regulae*? Ce que nous venons de remarquer permet bien entendu de répondre par la négative, en ce sens que la *Géométrie* n'est évidemment pas un traité de *Mathesis universalis*. Pourtant, si l'on se réfère à la partie rédigée des *Regulae*, à l'examen des *questions parfaitement posées*, il faudra être beaucoup plus positif. La *Géométrie* de 1637

[96]Le plan des *Regulae* est repérable dans les passages des règles VIII, XII et XIII. La note rédigée par Jacques Brunschwig, in G.F. I, note 2, p.156, en fait ressortir les grandes lignes

réalise effectivement (avec toutes les insuffisances ou mêmes les erreurs que nous rencontrerons au cours de notre lecture) cette partie là du programme général.

Il devient alors possible de soutenir que le traité de 1637 ne signale pas de changement de programme, qu'il est fidèle aux espoirs conçus dans les années vingt, même si il n'en réalise que la première partie. Succès partiel donc, mais décisif, car ce que l'on peut connaître est compris en application des préceptes de la Méthode, le Monde et toutes les sciences qui permettent de le comprendre s'examinent selon l'attribut essentiel de la matière, à savoir l'étendue et l'étendue se connaît par la science des grandeurs continues. Cette dernière est exposée dans la *Géométrie*. Voilà pourquoi écrit Descartes à Mersenne, *“je prétends avoir démontré [la supériorité de la Méthode] par ma* Géométrie*”*[97].

CONCLUSION

Reprenons donc les quatre domaines 'cartésiens’ engagés dans cette discussion.

-Les mathématiques traditionnelles. On y trouve des semences des certitudes divines d'une part et des critères de généralité de l'autre. Elles se présentent par ailleurs en désordre, elles sont mal cultivées et menacées par la stérilité.

-La *Mathesis Universalis*. c'est la science générale de l'ordre et de la mesure. Elle concerne un savoir universel. Cette science est bien celle qui est visée par les *Regulae*.

-La *Méthode* qui est une stratégie d'acquisition de toutes les connaissances certaines. Elle est elle aussi présentée dans les *Regulae*, ainsi bien sûr que dans *Le Discours*.

-*La Géométrie*. Il s'agit du tableau unifié, de l'échafaudage, de l'architecture des choses conçues comme étendues et parfaitement déterminées. Elle est servie par l'algèbre.

Voici quels sont, à nos yeux, leurs positions respectives.

La géométrie n'est évidemment pas la *Mathesis universalis*. Elle ne concerne pas les questions imparfaitement connues. Elle est cependant adéquate, conforme à la méthode telle que celle-ci a été énoncée dans les *Regulae* et dans *Le Discours*.

---

[97]*A Mersenne*, fin décembre 1637, G.F. I, p.820

Elle est plus voisine du *Discours*, non seulement par sa position éditoriale, mais surtout par la précision d'expressions telles que *"j'emprunterais le meilleur..."* qui expriment le mûrissement du programme.

Elle est cependant bien plus lisible, plus structurée par les énoncés des *Regulae*, notamment ceux qui concernent la théorie des proportions, le caractère absolu et relatif des composantes d'une question et la mise en équation des problèmes; quoique, sur des points importants, la doctrine évolue[98].

Les mathématiques ordinaires ont donc servi à alimenter, à inspirer -comme une muse- la méthode. Celle-ci se trouve brillamment illustrée et confortée par *La Géométrie* sans pouvoir être reconnue comme 'déduite' ou 'appliquée' du *Discours*.

La *Mathesis Universalis* peut revendiquer *La Géométrie* comme l'une de ses composantes. Ainsi, le programme des *Regulae* est-il réalisé, dans un domaine restreint certes, mais, dans celui-ci, avec un degré d'aboutissement remarquable. Le couple 'mathématiques traditionnelles-mathématiques réorganisées' est une expression particulière du couple 'sciences particulières-mathesis universalis'. A ce titre, réussir le passage de l'antécédent au conséquent du premier couple est une réalisation partielle du passage correspondant dans le second couple. La réussite de ce passage est bien entendu sous la dépendance de la méthode[99].

On a dit que pour Descartes, connaître, c'est construire; ceci pour instruire la thèse constructiviste radicale. Il est vrai que le mode sous lequel nous concevons les choses est l'étendue (ceci est vrai aussi pour les objets géométriques). Il est donc parfaitement exact que les

---

[98] Cette proximité de *La Géométrie* avec les *Regulae* est fortement défendue par Giorgo Israel (art. cité), comme elle l'avait déjà été par E.J.Dijksterhuis, in*The Mechanizatione of the World Picture*, Oxford University Press, 1961:*"L'essai, La Géométrie, dans lequel Descartes présente sa découverte nouvelle, peut [...] à bon droit passer pour une démonstration de la méthode cartésienne; il ne contient pas toutefois d'application des quatre règles du Discours, auquel cet essai est associé comme annexe. En fait, le vrai Discours de la méthode est constitué des Regulae ad directionem Ingenii"*

[99] Il faut souligner *"le parallélisme en cours entre la critique cartésienne des sciences particulières et la revendication de la nécessité de créer une forme du savoir universel d'une part, et, d'autre part la critique de l'état des mathématiques (arithmétique et géométrie) tel qu'il émerge de la tradition"* Giorgio Israel, p.464.

premières certitudes, les connaissances que nous avons en géométrie concernent des étendues. De même, en général, les premières connaissances certaines que nous avons sont des intuitions.

Il va de soi qu'une science qui se réduirait aux intuitions qui la fondent serait pour ainsi dire vide. Ce qui constitue les énoncés d'une science, ce sont les résultats des longues chaînes déductives. Savoir, pour Descartes, c'est donc surtout être en mesure de garantir la validité de ces chaînes[100]. Si les deux premiers préceptes de la méthode concernent les intuitions, les suivants concernent justement les procédures de formation et de contrôle de ces chaînes. Sans eux, point de méthode et donc point de science, ni universelle, ni particulière.

Or, si l'étendue, les lignes même, sont les constituants des intuitions géométriques, les règles de l'algèbre sont les moyens de contrôle des chaînes déductives de la géométrie. Ceci fait l'objet du début du livre I. On pourrait ainsi dire que l'algèbre est à la géométrie, ce que le troisième précepte de la méthode est au premier, ce que les procédures de formation des chaînes déductives sont aux intuitions.

De ce point de vue, le *Discours* serre d'assez prés *La Géométrie* en distribuant et en décrivant bien les rôles. Il ne dit rien, ou presque quand à la façon dont doit être jouée la pièce; pour cela, il est vrai, c'est vers les *Regulae* qu'il faut à nouveau se tourner[101].

Cette remarque est -à notre avis- importante car elle tend à réduire ce qui apparaît trop souvent comme un conflit entre la connaissance par construction géométrique et la connaissance par généralisation algébrique. Un Descartes constructiviste serait ainsi opposé à un Descartes algébriste au sein même de son unique traité de mathématique. Ce conflit est certes présent -du point de vue de l'histoire des mathématiques elles-mêmes mais il est assez peu sensible, voire même compréhensible, chez Descartes philosophe-mathématicien. Algèbre et géométrie, parures régionales d'une science

---

[100] *"Comprendre, c'est embrasser de la pensée, mais pour savoir une chose, il suffit de la toucher de la pensée"*, *A Mersenne*, 1630, Marion, p.117.

[101] Sur les rapports entre *La géométrie* et *Le Discours* et Les *regulae*. Serfati reprend l'avis de Costabel selon lequel l'Essai a bien plus à voir avec celles-ci qu'avec celui-là. *"La Géométrie nous semble cependant plus étroitement dépendante des Regulae que du Discours"* , il cite, à l'appui, le père Costabel qui écrivait: *"le moins que l'on puisse dire (de la Géométrie) est qu'il n'y a pas d'évidence de la dépendance de ce texte par rapport à la Méthode"* (Costabel, p.216), in Serfati, p.216.

déployée selon les préceptes de la méthode, versants complémentaires d'une région ordonnée et assurée de savoirs, ne sauraient s'opposer. L'affaire est philosophiquement entendue et *La géométrie* fournit de brillants arguments mathématiques en faveur de l'adéquation entre la connaissance par construction de courbes et de solutions d'une part et la connaissance par expression algébrique d'autre part. Bien entendu, en mathématiques, l'argumentation ne remplace pas la démonstration et celle-ci fait défaut. Ce qui est -mathématiquement- absent de l'essai, c'est précisément la démonstration de sa thèse principale: ce qui est connaissable par construction l'est aussi algébriquement (par écriture); on a même envie d'ajouter ‘et réciproquement’. Dans l'esprit de l'auteur, cette absence est-en principe- sans importance, ou sans dommage: la certitude des raisons générales méthodiques et philosophiques, confortée par la maîtrise d'une série d'arguments-exemples où la vérité se donne à voir géométriquement puis algébriquement vêtue suffit[102].

[102]Voici pourquoi d'ailleurs les contre-exemples clairement repérés comme tels sont exclus de la certitude, de la science donc: lorsque le connaissance par les caractères (fussent-ils algébriques et arithmétiques) ne débouche que sur de l'inconstructible, l'adéquation n'est plus et donc, la collaboration de tous les préceptes de la méthode est brisée. On aura reconnu les situations de courbes transcendantes.

SUR LA COHÉRENCE DE L'ESSAI DE 1637

Descartes n'a jamais caché que son troisième Essai était d'une lecture difficile[103]. Il faut déjà être géomètre pour tirer profit de sa lecture. L'avertissement est net qui *"craint qu'il ne pourra être lu que par ceux qui savent déjà ce qu'il y a dans les livres de géométrie"*. Au delà des raisons de circonstance qui font de ce texte une arme polémique dans la communauté mathématique[104], l'auteur présente les thèses de sa *Géométrie* comme les résultats d'une étude qui débute là où les prédécesseurs (anciens et modernes) se sont arrêtés. Qu'il y ait à redire sur la forme, la manière de l'exposition, Descartes en convient assez souvent; il est avant tout convaincu de l'excellence de ce troisième essai et, plus généralement, de ses thèses mathématiques. Il estime avoir saisi l'ensemble des mathématiques, dans leur désordre et leur inachèvement et les avoir en quelque sorte 'terminées', totalement défrichées et reconnues. Les discussions sur la précipitation ou, à

---

[103]*"Il y a peu de gens qui puissent entendre ma géométrie"* A.T. 1, p.487.

Les raisons pour lesquelles il se satisfait de cette difficulté ne sont pas elles-mêmes parfaitement claires. Encore à la fin de sa vie, il se plaignait à Mersenne en ces termes:*« Au reste je n'ai pu lire sans quelque indignation ce que vous me mandez avoir écrit au S^r^ Schooten, touchant ma géométrie, et vous m'en excuserez, s'il vous plaît. J'admire votre crédulité : vous avez vu plusieurs fois très clairement, par expérience que ce que le Roberval disait contre mes écrits était faux et impertinent, et toutefois vous supposez que j'y dois changer quelque chose, à cause que Roberval dit qu'il manque quelque chose en ma solution du lieu ad 3 et 4 lineas, comme si les visions d'un tel homme devaient être considérables. Ma géométrie est comme elle doit être pour empêcher que Rob. et ses semblables n'en puissent médire sans que cela tourne à leur confusion ; car ils ne sont pas capables de l'entendre et je l'ai composée ainsi tout à dessein, en y omettant ce qui était le plus facile et n'y mettant que les choses qui en valaient le plus la peine. Mais je vous avoue que, sans la considération de ces esprits malins, je l'aurais écrite tout autrement que je n'ai fait et l'aurais rendue beaucoup plus claire ; ce que je ferais peut-être encore quelque jour, si je vois que ces monstres soient assez vaincus ou abaissés » A Mersenne,* 4 avril 1648, A.T. p.

[104]Brouillé avec les 'analystes' parisiens, au premier rang desquels il met Roberval, Descartes indiquera que son traité a ce qu'il faut d'obscurité pour que celui-ci et ses collègues ne le puissent comprendre. Désirant parer à leurs éventuelles critiques, il ajoute *"Mais le bon est, touchant cette question de Pappus, que je n'en ai mis que la construction et la démonstration entière, sans y mettre toute l'analyse, laquelle ils s'imagine que j'ai mise seule…Pour l'analyse, j'en ai omis une partie afin de retenir les esprits malins en leur devoir; car si je leur eusse donnée, ils se fussent vantés de l'avoir sue longtemps auparavant, au lieu que maintenant, ils n'en peuvent rien dire qu'ils ne découvrent leur ignorance". A Mersenne,* 31 mars 1638, AT. II, p.83.

l'inverse, le lent mûrissement qui présidèrent à l'écriture de la *Géométrie* sont de moindre importance face à l'ampleur du projet que son auteur était convaincu d'avoir su mené à bien en rédigeant ces trois livres. *"Au reste, je prétends qu'il ne faut pas seulement croire que j'ai aussi fait quelque chose de plus que ceux qui m'ont précédé, mais aussi qu'on se doit persuader que nos neveux ne trouveront jamais rien en cette matière que je ne puisse avoir trouvé aussi bien qu'eux si j'eusse voulu prendre la peine de les chercher"*[105].

Si l'on en croît les sous-titres des trois livres qui composent l'Essai, le sujet est fort classique et le plan tout-à-fait net. Livre premier, *des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites*. Livre second, *de la nature des lignes courbes* et Livre troisième, *de la construction des problèmes qui sont solides, ou plus que solides*. Selon ces sous-titres, donc, les thèmes traditionnels de la géométrie des anciens sont repris d'après la séparation en problèmes plans (ceux qui correspondent à la construction par cercles et droites) et en problèmes solides et sursolides (constructibles par d'autres lignes), le traitement de ces deux classes de problèmes réclamant une mise au point quant au classement des lignes courbes. Le géomètre pouvait reconnaître un programme à la fois très convenu et en même temps fort ambitieux.

Comme on s'en aperçoit immédiatement, le plan de l'ouvrage recèle des tours et détours dans le traitement des questions qui ont fait sa célébrité. Le problème de Pappus 'circule' dans les livres I et II: abordé avant le classement des lignes courbes, il est réexaminé après; la recevabilité des courbes se discute dans les trois livres sur des modes et selon des critères variés; la théorie des équations et de leurs racines débute au premier livre pour constituer l'essentiel du troisième et le fameux traitement des normales et des tangentes du second livre ressemble à une vaste digression. Quant à ce qui a plus particulièrement rendu le traité célèbre, c'est-à-dire l'expression de lieux ou de relations géométriques par des égalités algébriques, s'il y est fait mention très souvent, il ne nourrit pas une thématique générale ni un développement spécifique. On ne trouve dans la *Géométrie* aucune thématisation de la correspondance entre courbe et équations ni du principe de l'emploi des coordonnées, ce qui fait écrire à P. Costabel

[105] *A Mersenne*, fin décembre 1637, A.T. I, pp.478-479.

que *“la Géométrie ne livre au lecteur la réforme considérable dont elle est le fruit que comme mode d'emploi”* [106].

Abordant la lecture de l'Essai de 1637, on doit prendre conscience du regard que l'on y porte. L'histoire des mathématiques en a généralement fait le manifeste de la géométrie analytique, de l'expression des courbes par leurs équations et, potentiellement, y a vu le berceau de l'analyse fonctionnelle qui devait suivre assez rapidement. Un certain trouble ne peut manquer de saisir le lecteur de la *Géométrie*, en quête d'un traité de géométrie analytique, dans la mesure où *“l'équivalence entre courbe et équation, qui fait le cœur de la géométrie analytique, ne constitue qu'un aspect presque marginal dans la* Géométrie*”* [107]. La place considérable donnée à des études et des méthodes aujourd'hui totalement ‘exotiques' et à des instruments (les compas cartésiens) dont on ne saisit plus -sans effort spécifique- la rationalité, contribue à voiler la clarté et les lignes de forces du projet cartésien. Ne serait-ce que parce la notion de fonction n'y est pas du tout présente, ni l'évocation d'un ensemble numérique restituant la continuité des grandeurs, les mathématiques qui surgiront du ‘continent ouvert par Descartes‘ ne structurent pas *La Géométrie*.

De cette troublante difficulté sont nées trois attitudes, trois lectures très clairement distinctes, associées -pour deux d'entre elles- à des thèses nettement opposées.

Une lecture évaluatrice

Premièrement, il est possible et même nécessaire pour l'histoire des mathématiques de procéder à une lecture strictement ‘évaluatrice’ des nouveautés et des vérités contenues dans l'essai. Il s'agira d'examiner, point par point, ce qui s'y trouve de nouveau et d'exact (ou d'erroné). Même si le traité cartésien n'est pas organisé sur un mode axiomatico-déductif, on y lit des propositions, des résultats et des théorèmes dont certains sont vrais et nouveaux, d'autres vrais et déjà énoncés par d'autres, d'autres enfin sont faux. Parmi les propositions ou thèses nouvelles et vraies, certaines ne sont pas démontrées, ou manquent de généralité. Débroussailler tout cela fait partie du programme de

---

[106] Costabel, 198X, p.220. Giorgio Israel rappelle de même l'idée de Gino Loria selon qui, comme Christophe Colomb, *“Descartes découvre un monde nouveau sans le savoir”*, Giorgio Israel, p. 452.

[107] Henk J.M. Bos, 1988, p.350.

l'histoire des mathématiques et des auteurs s'en sont fort bien chargé[108]. On peut alors faire un ‘bilan général’ au terme duquel on évaluera la portée révolutionnaire ou non de l'ouvrage, sa place dans l'histoire de cette science. On s'arrêtera aux multiples débats de priorité que ces questions ne manquent pas de soulever. Cette lecture est utile, voire indispensable, mais elle présente un inconvénient de taille et une insuffisance. Il faut, pour la mener à bien, être parfaitement au fait des mathématiques d'avant Descartes, de celles de son temps et aussi de celles qui virent le jour postérieurement. Ensuite, elle peut se passer de l'examen et de l'élucidation de l'organisation globale de l'Essai -du ‘fil de Thésée’- qui restera cachée. On risque, à en rester là, de ne pas saisir la pensée et le programme cartésien.

Parmi les multiples controverses d'histoire des mathématiques alimentées par la *Géométrie*, nous en rappelons une seule. Descartes et Fermat s'y partagent le rôle principal. Qui a contribué, de la manière la plus décisive, à la réunion de la géométrie des courbes avec l'algèbre et ce, au moyen d'un système de coordonnées (que nous appelons cartésiennes)? Ils sont les deux plus sérieux prétendants. Sans traite ici du dossier complet de cette concomitance historique, on peut rappeler que Fermat, dans son *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* écrit vers 1629, a effectivement accompli l'essentiel de la tâche; il peut étudier les problèmes plans et solides par le traitement algébrique de leur équation. On trouve chez lui une idée du lieu géométrique (algébriquement défini) plus affirmée que chez Descartes, de même qu'une possibilité plus grande de considérer les équations comme ‘définissantes’. Le traité de Descartes est nettement supérieur à d'autres points de vue: il est (ou se veut) plus général et plus rigoureux c'est-à-dire mieux fondé. Il aborde des problèmes de degré plus composé et ne fait aucune concession à des méthodes, efficaces certes, mais méthodologiquement contestables, comme celle de l'adégalisation de Fermat. Au total il semble bien que les deux savants ne se doivent à peu près rien l'un à l'autre et s'ils ont polémiqué sur d'autres points (la méthode des *maximis et minimis*), ils sont resté parfaitement sereins sur la question de la paternité de la géométrie algébrique.

---

[108]Nous en mentionnons ici quelques uns: John Wallis, Claude Rabuel, La Hire, Cantor, Paul Tannery, Henri Lebesgue, Carl Boyer, Molland, Pierre Costabel, Jules Vuillemin, Henk Bos…

Un projet central, construire des courbes; un outil secondaire, leur expression algébrique

La seconde position propose un cadre de compréhension générale de l'ouvrage. Dans celui-ci, deux principales catégories d'objets sont considérées. 1) des équations algébriques (polynomiales), nombreuses et traitées assez différemment selon les cas: parfois pour exprimer une racine[109] à construire; parfois comme expression d'un lieu géométrique; parfois comme manifestation de la généralité et du bon ordre d'une méthode utilisée dans le traitement d'un problème. 2) On y trouve aussi des courbes et ces courbes ne prennent vraiment place dans la géométrie que lorsqu'elles sont constructibles. Le traité développe donc largement des méthodes de constructions de courbes. Les méthodes constructives sont elles aussi variées, mais il en est une qui domine, c'est la construction par ‘instruments légitimes’, c'est-à-dire par règle et compas ordinaire et aussi à l'aide des compas cartésiens. Ces instruments sont ‘légitimes’ en fonction de critères diversifiés mais précis (restitution de mouvements continus, constructibilité par points, par cordes rectilignes …).

Or, l'harmonie entre ces deux catégories d'objet ne va pas de soi dans l'*Essai*. Les moyens de connaître les uns n'apparaissent pas toujours (ou pas souvent) adéquats à la connaissance des autres. D'où la question inévitable suivante: de ces deux grandes catégories, quelle est celle qui organise, qui tient le premier rôle dans *La géométrie*? Les courbes construites (ou constructibles) ou les expressions algébriques?

Il existe des arguments consistants pour défendre l'absolue prééminence de la construction des courbes et des racines sur leur expression algébrique. Nous en présentons ici les principaux. Cette thèse est d'autant mieux soutenue si l'on s'accorde sur la nature de ce qu'entend Descartes par géométrie. Si l'on admet que, pour lui, la géométrie est *“l’art de résoudre des problèmes géométriques”* si l'on pense qu'il ne s'agit pas d'une science axiomatique déductive, produisant des théorèmes sur les objets géométriques considérés pour eux-mêmes, examinant les propriétés associées à ces objets géométriques, alors on sera conduit à défendre la thèse selon laquelle, le but de la Géométrie n'est pas la connaissance des courbes en elles-

[109]Quand nous employons ‘racine’ isolément, cela désigne une solution d'une équation du type P(x) = 0, et non la racine carrée, ou cubique etc.

mêmes, ou des racines des équations, comme telles, mais qu'il s'agira de les maîtriser comme moyens de résolution et méthode de classement des problèmes auxquels elles sont associées[110].

Il s'agit donc de savoir résoudre, avec méthode, des problèmes. Les méthodes classificatrices et simplificatrices sont nouvelles, en particulier par le recours à l'algèbre, mais la nature de ce qu'est un problème et de ce qu'est sa solution n'est pas conçue en des termes radicalement nouveaux. Le passage par l'algèbre contribuera grandement à organiser l'ensemble des problèmes de la géométrie, sans changer les objets créés par le mathématicien. L'un des auteurs les plus pénétrants de ceux qui soutiennent cette thèse, Henk Bos observe par exemple que l'application stricte des enseignements du livre I, au problème du triangle de Clavius mène strictement à la même construction (à la même solution) que celle de Clavius. Le livre I ne change pas les solutions ni les résolutions, en ce sens et à ce stade[111].

Des méthodes de construction de courbes diverses existent et sont examinées -ou inventées- par Descartes. Elles s'accompagnent de critères d'acceptabilité et de simplicité ainsi que de règles de succession, d'enchaînement, qui sont très conformes aux préceptes de la méthode. Nous en verrons au livre II, une belle application avec la

---

[110] Le plus net exposé de cette position est dû à H.Bos."*Le but de la Géométrie est de fournir une méthode pour l'art de résoudre des problèmes de géométrie. Ce but inclut deux niveaux de problèmes, un niveau technique et un niveau méthodologique; en conséquence, le livre a un double programme. La structure de la Géométrie est adaptée et compréhensible, à partir de ce but et de ce double programme. Au niveau technique, le programme consistait à fournir une analyse, une méthode universelle pour trouver la construction de n'importe quel problème de la tradition. Cette méthode consistait à utiliser l'algèbre dans l'analyse des problèmes géométriques. Au niveau méthodologique, le programme concernait une question cruciale[…] comment construire lorsque la règle et le compas sont insuffisants",* Bos, 1988 pp.356-8.

René Taton est du même avis lorsqu'il écrit*"Descartes avait conçu cette science comme une application de l'algèbre à la géométrie[…] Ainsi apparaît-elle, non pas comme une branche autonome de la science, mais plutôt comme un outil permettant de résoudre de nombreux problèmes géométriques[…]Les courbes ne s'y trouvent pas étudiées pour elles-mêmes d'après leurs équations, mais l'intérêt se porte quasi exclusivement sur celles qui apparaissent comme solutions de problèmes à résoudre"* Taton, *L'œuvre scientifique de* Monge, p.101, cité p.453.

[111] Le problème est le suivant: *étant donné un triangle ABC et un point D, on demande de tracer une ligne droite divisant le triangle en deux parties égales*. Il est chez Clavius, *Geometria practica*, Liber VI, Prop.12, Probl. 2, in Clavius, pp.353-9

génération de la 'parabole cartésienne'. Si les critères d'analyse mathématique moderne ne rendent pas très claire cette manière cartésienne que sont ses combinaisons de mouvements, la méthode des *Regulae* y est, par contre, fort bien mise en œuvre: les mouvements s'enchaînent l'un d'après l'autre, comme les chaînes d'intuitions-déductions. En ce passage important de l'Essai, point n'est besoin de l'identification des courbes à leur expression algébrique et ce n'est pas le seul.

Certaines courbes sont même examinées sans référence à leur équation (les 'ovales' par exemple) et, par ailleurs, l'auteur consacre de nombreux passages à des réflexions sur les équations à une inconnue, équations qui ne sont évidemment pas équivalentes à quelque courbe que ce soit.

Si donc l'identification des courbes à leur équation n'est pas centrale dans la géométrie, quel rôle, indiscutable, joue la mise en équation ainsi que le long développement du livre III sur les racines de polynômes? Il n'est pas question, pour les tenants de la thèse constructiviste, de nier ce rôle qui, au fond, est très simple: l'algèbre et les équations sont, dans *La Géométrie*, strictement au service de la constructibilité, de la simplicité et de l'acceptabilité des courbes. Le rôle est important, mais auxiliaire; c'est pourquoi, ce n'est pas la logique de l'algorithme algébrique qui structure *La Géométrie*.

Il n'est pourtant pas niable que le critère révélateur de simplicité (ou de complexité progressive, par degré) est celui du degré des équations. Le classement naturel des polynômes sera l'échelle indiquant la complexité croissante des lieux géométriques.

Une longue part du Livre III semble traiter de théorie des équations algébriques. C'est vrai en un sens, mais en ce sens que l'effort de l'auteur vise à exhiber des formes standard pour les équations et leurs solutions, ces formes n'étant aucunement autonomes, mais bien plutôt des constructions-standard. On peut encore ajouter que la branche mathématique la plus immédiatement stimulée par *La Géométrie* ne fut pas la géométrie analytique mais fut celle que l'on nomma *Construction des équations*[112].

Certes, cette thèse dote *La géométrie* d'une structure repérable et, en l'adoptant, on perd l'impression d'errance qui peut émaner d'une

---

[112]H.Bos, 1988, p.367.

lecture ‘spontanée’. Des difficultés et des objections surgissent cependant. Signalons-en deux. La variété des méthodes constructives par instrument se conforme assez mal aux exigences de la méthode. On a l'impression d'être mis en présence de critères *ad hoc* quant à leur recevabilité. Les compas cartésiens sont certes remarquables; ils composent entre eux des mouvements liés par la nécessité et, chacun dans leur genre, ils respectent la progression de degré de complexité en degré suivant, selon un ordre qui est compatible avec les *Regulae*, avec la théorie des proportions. Mais quelle garantie offrent-ils de parcourir l'ensemble des courbes recevables? Qu'est-ce qui fait l'unité des méthodes dont ils usent? Entre le *Mesolabum* et le *compas à glissière et pivot* qu'avons-nous comme garantie de production d'objets (courbes ou lignes-solutions) de même nature, ordonnés et formant l'ensemble complet de ce que la géométrie se doit de traiter? Ces questions demeurent sans réponse claire et on a peine à se convaincre que Descartes, face à ces difficultés, qu'il reconnaissait bien, ait maintenu une primauté sans conteste à la construction géométrique sur l'expression algébrique.

La seconde difficulté est rendue manifeste par le long *excursus* du livre II concernant la manière générale de trouver les normales (et donc les tangentes) des courbes. Nous y reviendrons, mais personne ne discute que cette manière-là ne soit entièrement et presque exclusivement algébrique, sans considération de constructibilité géométrique (ou plutôt, cette dernière est immédiate quand l'algèbre a *fait ses effets*). Descartes dit clairement le cas qu'il convient de faire de cette longue considération algébrique, à savoir le plus grand: *«Et j'ose dire que ceci est le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'ai jamais désiré savoir en Géométrie”*[113]. A cette déclaration non équivoque, qu'opposer en soutien à la thèse prise en défaut, sinon cette élégante parade de H.Bos: *“Peut-être peut-on dire que la muse de l'algèbre essayait par là d'entraîner Descartes au delà de son adhésion au fondement géométrique traditionnel, et parfois, y parvenait”*[114].

[113]*La Géométrie*, A.T.p.413
[114]H.Bos, 1988, p.369. Revoir la traduction, qui est ici, mauvaise.

Courbes et expressions algébriques sont équivalentes. Les méthodes instrumentales sont secondaires.

Il faudrait donc parcourir *La Géométrie*, plutôt par l'autre versant, le versant algébrique. Telle est la position alternative à la précédente. Le cœur de l'Essai serait l'identification des courbes et de leur équation algébrique. Cette identification, loin d'être un thème marginal et secondaire déterminerait le plan, la structure et la logique du traité. On rappellera en renfort Viète, qui déjà avait su jeter un pont entre algèbre et analyse et que le Descartes de 1637 ne peut pas n'avoir pas lu[115]. Pour valider cette lecture, on doit ‘agrandir’ le concept cartésien de courbe: les courbes donnent les solutions des problèmes proposés, elles sont aussi des instruments pour réussir la construction des équations, mais surtout, elles sont en elles-mêmes objet d'études et de recherches. En elles-mêmes, c'est-à-dire même si la construction n'est pas effective, si elle n'est que de droit.

Ainsi, le problème de Pappus est réputé entièrement résolu par Descartes. S'il est vrai qu'il a couvert tous les versants (géométriques et algébriques) de ce problème à quatre lignes, il n'a certainement pas réalisé la construction à *n* lignes. Il affirme pourtant l'avoir résolu et il est exact que la partie ‘algébrique’ du problème de Pappus est entièrement réglée. Son *etc.* est ici légitime. Quelque soit la configuration d'un problème de Pappus, il est en mesure de donner l'équation de la courbe-solution, de la classer, d'en situer la difficulté par rapport au problème plus simple. On serait donc autorisé à en déduire que pour Descartes, *résoudre, ce n'est pas forcément construire*.

Le fameux excursus du livre second sur les normales reprend, dans le cadre de cette interprétation, sa place primordiale, et la théorie des équations du livre III est réévaluée en hausse quant à son exhaustivité car la méthode y est générale, elle unifie les ‘recettes‘ *ad hoc* précédentes et surtout, elle valorise absolument l'expression algébrique: la courbe est véritablement donnée par son équation algébrique[116].

Que dire alors des longs développements sur les constructions par instruments et autres variations moins algébriques? Il ne s'agirait, pour

---

[115]Descartes s'inscrirait alors, plus fortement, dans une mouvance mathématique plus récente, avec Viète, Harriot, Gethaldi, Fermat …

[116]Cf.Enrico Giusti, p.436

l'essentiel, que de figures rhétoriques[117]. La tradition des 'constructeurs de courbes' est si forte autour de Descartes qu'il lui faudrait les convaincre de la validité de sa méthode afin d'assurer une certaine continuité avec la géométrie contemporaine.

Au fond, pour les tenants de cette thèse 'algébrique', des deux critères 'équation algébrique' et 'construction générique', on doit totalement privilégier le premier car il est 'unifié', global, ordonné quand l'autre est aussi varié que particulier. Comme l'écrit E. Giusti,*"à cette multiplicité d'instruments et de constructions, ne peut que correspondre une pareille multiplicité de recherches et de méthodes"* alors que*"l'identification entre courbes et équations règle la question. L'équation donne la description universelle de toutes les courbes…"*[118]. La multiplicité des critères *ad hoc* qui rendent acceptables ou non l'usage de tel instrument s'expliquerait aussi parce que, derrière elle, se profilait le 'tribunal des équations' selon lequel, il ne fallait pas que l'instrument engendre des expressions non algébriques, soit transcendantes. Les raisons *ad hoc* étaient ainsi énoncées qui évitaient de tels engendrements[119].

Comment cependant être entièrement convaincu par cette thèse radicale? Sans doute, la réévaluation des méthodes algébriques chez l'auteur de *La Géométrie* est-elle de bon aloi, mais nous ne pensons pas qu'il faille payer le prix demandé, à savoir, la réduction du rôle des constructions géométriques. S'il fallait concentrer le point de difficulté, il serait le suivant: pour Descartes, effectivement, nous pensons que *résoudre, c'est construire*. Ce n'est bien entendu pas construire à chaque fois, mais c'est soutenir cette possibilité. Cette possibilité est

---

[117]Les autres méthodes 'par construction instrumentales' sont sans commune importance méthodologique. *"Au point,* écrit Giusti, *que certains auteurs ont pu y voir un point centrale de l'idée cartésienne […] Notre thèse est, inversement, que ces représentations occupent une position mathématiquement secondaire par rapport aux équations algébriques: il faut donc rendre compte de leur présence dans l'ouvrage de Descartes et de leur rôle dans l'économie de* La Géométrie. *A notre avis, ils ont une fonction plus rhétorique que scientifique; plus que dans la maîtrise de la géométrie, leur justification doit être recherchée dans celui d'une stratégie d'exposition"* . Giusti, p.436.

[118]Enrico Giusti, p.432-433 et note 36

[119]C'est encore un argument d'E.Giusti, p.439. On pense à l'exclusion de l'instrument hugonien traceur de spirale qui n'est pourtant pas plus complexe que les traceurs d'ovales du livre second.

d'ailleurs une nécessité pour une raison qui nous paraît très simple. Les formes de l'algèbre n'existent pas pour elles mêmes, elles sont le nom de lignes. Il est bien clair qu'elles ne doivent pas être considérées pour leur seule valeur logique et leur ‘spontanéité’ algorithmique.

On ne voit vraiment pas comment l'algèbre peut bien procurer quelqu'intuition que se soit. D'abord parce que ses objets sont des caractères et que les caractères ne sont pas des choses mais des noms ou des images et donc ne sont pas connaissables pour eux-mêmes. Ensuite car si j'ai l'intuition d'une ligne droite ou d'un cercle, je n'ai aucune intuition de $y = az + b$ ou de $x^2 + y^2 = 1$, relations forts composées. Il faudrait donc admettre une séparation très considérable et très profond entre la *Géométrie* d'une part et les *Regulae + les Principes + le Discours*, d'autre part pour soutenir la thèse algébriste radicale.

En parcourant *La géométrie*, nous verrons bien que Descartes abuse parfois de notre confiance, ou s'abuse lui-même, convaincu qu'il est de la constructibilité de certaines solutions sans qu'il n'en fournisse de preuve, mais il faut bien reconnaître que *“nulle part, dans la Géométrie, Descartes n'introduit ou ne présente une courbe, par l'emploi d'une équation”*[120]. En tenir pour cette thèse, c'est sans doute obligatoirement accepter de voir, dans les grandeurs dont il est question dans la géométrie, autre chose que des lignes, sans doute quelque chose comme des nombres réels[121]. C'est pourquoi, nous commencerons par regarder de prés les premières pages où sont mises en scène les grandeurs, l'unité et les règles des homogènes, mise en scène qui, précisément, institue et rend possible l'éviction des nombres (sauf 1 et les exposants) de *La Géométrie*.

Doit-on renoncer à l'exploration puisque, ni le versant ‘primat du géométriquement constructible’, ni son opposé ‘primat de l'expression algébrique’ ne nous conviennent? Peut-être pas; peut-être suffit-il de suivre Descartes dans une de ses thèses les plus fortes de l'Essai, et l'une des moins bien établies pourtant. Une courbe est constructible, par instrument légitime lorsqu'elle admet une équation algébrique.

[120]H.Bos,1981, p.322.

[121]C'est d'ailleurs ce que défend longuement E.Giusti dans la première partie de son article.

Aucune des deux démarches ne saurait faire de l'ombre à l'autre. L'équivalence des deux critères est une thèse essentielle. Il ne s'agit pas cependant d'une équivalence existentielle, mais seulement technique. Les irremplaçables qualités de l'outil algébrique, révélateur d'ordre, critère de simplicité, ne mettent pas 'en chômage' l'esprit géométrique qui devra avoir le dernier mot. Nous entendrons les deux voix du dialogue dans le traité.

Descartes ne peut manquer d'identifier les difficultés de l'adéquation des deux critères[122]. Ce sont des difficultés techniques qu'il ne nie pas, mais qui -à notre avis- ne sauraient entamer sa conviction. En effet, ces difficultés sont particulières (elles réclament plus de calculs, ou plus d'instruments…toute chose ennuyeuse et relevant des tâches du maçon) alors que les raisons qui fondent la thèse de la stricte cohérence (équivalence?) des deux 'définitions' des objets étudiés par *la géométrie* sont des 'raisons générales', conséquences de thèses philosophiques. Ces raisons sont celles de l'architecte.

Comme les expériences -fort utiles mais pas nécessaires- de la physique ne peuvent -en aucun cas- invalider la thèse métaphysique de la matière-étendue et de même qu'elles ont pour fonction de confirmer, de convaincre, d'argumenter en faveur de cette thèse générale, de même les exemples d'adéquation entre une expression algébrique et un procédé constructif ont pour fonction de renforcer la thèse générale de l'adéquation entre les critères algébriques et constructifs, de la montrer à l'œuvre plutôt que de la démontrer. Les expériences, d'ailleurs, sont interprétées comme des confirmations. Ainsi, les exemples de coïncidence (Pappus à quatre lignes et parabole cartésienne) renforcent la 'raison générale' et aucun argument particulier et technique ne peut invalider la thèse de la coïncidence, de la réunion des domaines. Cette coïncidence est le résultat de la coïncidence -à la base- entre les opérations de l'arithmétique et les constructions-standard de la géométrie des choses considérées dans leur étendue. Les combinaisons

[122]Giorgo Israel n'hésite pas, après avoir rappelé le cas que Descartes faisait -en général- des questions techniques de détail à ajouter qu'il *"doute que, non seulement, Descartes ne se soit jamais préoccupés de ces difficultés, mais même qu'il s'en soit rendu compte"* , G. Israel, p.458.

des unes ne peuvent que correspondre à des combinaisons des autres. Tel est le rôle de la ‘structure de base’ évoquée par Scott[123].

Ceci ne suffit pas pourtant, car si la correspondance était une équivalence, il suffirait d'examiner un des aspects d'un problème de géométrie (soit les caractéristiques de son équation algébrique soit les méthodes de construction dont il relève) pour le connaître. Or, la connaissance vraie, la seule qui ne soit pas une ignorance masquée, c'est la connaissance simultanée des deux versants, c'est la connaissance d'un objet constructible et exprimable algébriquement. Et ce, pour une raison bien simple:

-connaître les courbes sans leur forme algébrique correspondante revient à les connaître en désordre, au hasard, sans rapport à leur degré de relativité, de complexité[124].

-connaître les courbes sans leur construction, revient à les connaître formellement, donc à les ignorer.

Le premier livre doit convaincre le lecteur, comme il a sans doute convaincu l'auteur, car il est non-problématique du point de vue de l'alternative que nous venons de discuter. Le problème de Pappus à quatre droites (ou cinq si l'on considère le problème, première partie) est algébriquement résolu, par équations du second degré (à une inconnue pour les points isolés, à deux inconnues pour les lieux) et il est géométriquement construit, par lignes solutions, puis par lieux solutions. Il n'y a donc pas de problème de structure à ce livre premier, et les difficultés commencent avec le livre deux: comment construire, et comment résoudre quand on dépasse le second degré?

---

[123]Voir ci-dessous, Livre premier, p. nn

[124] Il est assez délicat de dater la claire affirmation de cet équilibre. La lettre à Beeckmann du 26 mars 1619 peut donner lieu à des interprétations diverses. Le critère algébrique, comme outil essentiel du classement, et donc de la connaissance des courbes et des problèmes y est peut-être présent, mais pas explicitement. Il joue à plein pour la résolution des problèmes relevant d'équations du troisième degré mais il n'est pas clairement revendiqué pour les problèmes plus composés. Il y est plutôt question d'une correspondance entre les divers genres de nombres (rationnels, irrationnels radicaux et imaginaires) avec les divers types de courbes (traditionnellement géométriques, cartésiennement géométriques et ‘transcendantes’). Voir la traduction et le commentaire d'A. Serfati, pp.205-6.

La *Géométrie* est alors un balancement d'un critère à l'autre, d'un versant à l'autre avec des moments de jonction. Bref, à le lire avec le regard 'des anciens', on ne le saisit pas bien, avec celui des successeurs, on est gêné par des figures 'rhétoriques'. C'est l'œuvre du 'dernier des anciens et du premier des nouveaux' qu'il faut parcourir *"telle que son auteur n'y souhaite rien davantage"* [125]. L'auteur ne balance pas ainsi entre deux problématiques contradictoires (pour lui) mais, à l'inverse s'efforce de dresser l'échafaudage du tableau unifié de la géométrie et de l'algèbre, c'est-à-dire de la science des choses parfaitement comprises qu'annonçaient les *Regulae*[126].

Il ne s'agit pas d'énoncer ainsi un 'jugement de Salomon' au terme duquel Géométrie et Algèbre se partageraient par moitié le royaume des mathématiques cartésiennes. Il y est bien question de géométrie, et seulement de géométrie, c'est-à-dire de problèmes à construire, de racines à construire, de courbes à reconnaître et à construire. Les données -de même- sont des objets géométriques. Mais cette géométrie est transformée, guidée, par un serviteur tel que, sans lui, elle ne serait que confusion, désordre et stérilité; ce serviteur est l'algèbre et le couple fonctionne ainsi, sans conflit majeur.

---

[125]A Mersenne, fin décembre 1637, A.T.I,478, cité par Pierre Costabel, 1988.

[126]Nous sommes en plein accord avec Giorgo Israël qui écrit ainsi *"La force de Descartes est de tenir ensemble ces deux exigences: pour cette raison, toutes les contradictions internes de son texte ne sont pas des conséquences de deux visions divergentes de la géométrie, mais sont la difficulté d'une unique vision cohérente, dictée, non par les exigences de nature mathématique, mais par les exigences d'un programme philosophique"*, p.458.

LIVRE PREMIER

“Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin, par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire”[127].

Les premières pages de *La Géométrie* passent en général pour être suffisamment claires d'elles-mêmes. L'auteur montre comment les opérations de l'arithmétique sont véritablement des constructions géométriques. Ces constructions correspondent à des propositions euclidiennes non discutées. La géométrisation du calcul algébrique serait de ce fait établie. Ceci semble d'autant plus satisfaisant que la géométrie, science diversifiée et même parfois difficile, est ainsi rapportée à des notions toutes simples et propres à la connaissance intuitive. Nous voici en belle et bonne *méthode*. On aurait tort de trop s'y fier; de délicats problèmes surgissent dès que l'on interroge l'apparente simplicité de ces premières pages.

Une grande part de l'Essai va consister à établir la preuve (souvent technique) qu'il est possible de réduire les *problèmes de géométrie* à la construction de *quelques lignes droites*, mais un sérieux problème préliminaire à cette réduction doit être reconnu au sein de ces pages dont la réputation de simplicité est, en fait, usurpée. Il faut regarder de plus prés le statut de ces *quelques lignes droites*. Nous souhaiterions indiquer pourquoi les éléments que Descartes va multiplier ou diviser entre eux ne sont ni des nombres, ni vraiment des segments et en quoi les phrases sur le rôle de l'unité et le respect de l'homogénéité des formules algébriques doivent être méditées de prés.

LES PROBLÈMES DE L'UNITÉ

Les règles XIV et XVIII placent la claire connaissance de l’unité et de son rôle au cœur des procédures concernant l’ordre et la mesure; cette question engage l’ensemble de la théorie mathématique cartésienne.

“L’unité est cette nature commune dont doivent participer, à titre égal […] toutes les choses que l’on compare entre elles.[…] Toutes les relations qui peuvent exister entre des êtres de même genre doivent se ranger sous deux rubriques essentielles: savoir l’ordre ou la mesure […] Je reconnais en effet quel est l’ordre entre A et B, sans rien

[127]A.T. X, p.369.

considérer d'autre que ces deux termes extrêmes; alors que je ne reconnais pas quel est le rapport de grandeur entre deux et trois, à moins de considérer un troisième terme, savoir l'unité, qui est la mesure commune de l'un et de l'autre.

Il faut savoir aussi que les grandeurs continues peuvent, grâce à une unité d'emprunt, se réduire à une multiplicité, parfois en totalité, et toujours au moins partiellement; que la multiplicité des unités peut ensuite se disposer selon un ordre tel que la difficulté qui appartenait à la connaissance de la mesure, finisse par dépendre de la seule considération de l'ordre; et que c'est en ce progrès que réside le plus grand secours de la méthode"[128]

Soumettre la mesure à l'ordre, tel est le but; l'unité, tel est l'outil essentiel. La règle XVIII est encore plus explicite puisqu'*"il faut avertir que l'unité [...] est ici la base et le fondement de toutes les relations..."*[129]

Il s'agit donc de voir si ces remarques suffisent à réaliser la première tâche -décisive– de la *Géométrie* dont l'accomplissement devra rendre réalisables toutes les opérations de l'algèbre par composition et construction de lignes droites. Cette tâche consiste à définir les opérations algébriques comme des constructions géométriques de lignes droites.

Deux grandeurs étant données, avons-nous leur somme? La *Géométrie*, comme les *Regulae* permettent de l'affirmer en vertu d'une opération de juxtaposition ou d'adjonction (selon la règle XVIII). Il en va de même pour la soustraction. Il n'y a donc pas de problème associé à la constitution de cette opération interne dans les grandeurs qu'est l'addition. a et b étant données, $a+b$ est immédiatement déterminée, homogène aux données et, sans rien d'arbitraire[130].

Il n'en va pas de même pour la multiplication, la division (et aussi pour l'extraction de la racine carrée). Deux grandeurs étant données, comme lignes, leur produit n'est pas déterminé et il n'est pas, en tout cas, immédiatement constructible. Il y a plus, une grandeur étant donnée, son carré n'est pas déterminé. Tout dépend, en effet de la ligne

---

[128] Règle XIV, G.F. 1, pp.182-3

[129] Règle XVIII, G.F. 1, p.195

[130]Ces deux opérations internes d'addition et de soustraction sont d'inspiration euclidienne (prop.2 et 3, Livre I) quoiqu'il faille souligner qu'elles n'existent pas - en tant qu'opération- chez l'alexandrin.

unité. Selon ce qu'elle sera, la représentation du carré, du produit, de la racine sera d'autant variable (la longueur de la ligne-produit est inversement proportionnelle à celle de l'unité).

Les procédés cartésiens sont les suivants:

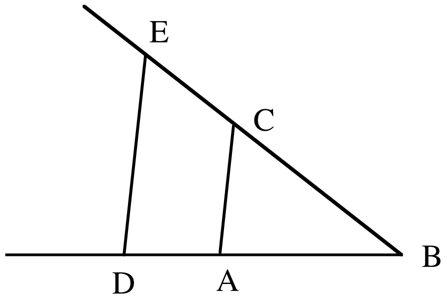


fig. 1

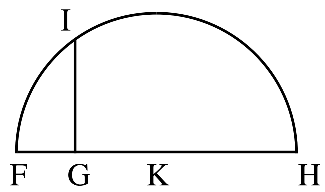


fig. 2

1) Dans la figure 1 ci-dessus, soit AB = 1. Pour multiplier BD par BC, on trace DE parallèle à CA. *“BE est le produit de cette multiplication”*[131].

On a, en effet, BE:BC = BD:BA, soit BE = BC.BD

2) Même figure. Pour diviser BE par BD, on trace AC parallèle à DE. *“BC est le produit de cette division”*

On a, en effet, BC:BA = BE:BD, soit BC = BE:BD

3)Dans la figure 2 ci-dessus, soit FG = 1. Pour obtenir la racine carrée de GH, on trace le demi-cercle de diamètre FH et la perpendiculaire à FH et G, qui le coupe en I. *“C'est GI la racine cherchée”*

Dans le triangle rectangle FIH, la hauteur GI vérifie bien $GI^2 = FG.FH$ donc $GI = \sqrt{GH}$.

On pourrait donc estimer que la 'réduction à la ligne' des opérations géométriques s'accompagne d'une régression, par perte de détermination. En effet, si l'on donne pour produit de deux lignes le rectangle formé sur elles, ce produit, cette grandeur est parfaitement déterminée. L'opération est bien définie. L'ennui -c'est l'enjeu de la réforme cartésienne- est qu'elle n'est pas une opération interne dans la mesure où le résultat (une aire) n'est pas homogène aux données (des longueurs).

Descartes n'esquive pas la question et nous avertit nettement qu'il ne s'agit pas de multiplier deux lignes. A bien y regarder, il n'y a pas,

[131]A.T. VI, p.370.

dans la *Géométrie*, d'opération qui, à deux lignes, associe leur ligne-produit. A trois lignes, dont l'une est nommée l'unité, on peut en associer une quatrième par la vertu de la théorie des proportions et de la ‘propriété de Thalès’ (il en va de même pour la division et la racine carrée, cette dernière utilisant un corollaire du théorème de Pythagore).

La même question est plus longuement exposée dans la règle XVIII et la doctrine y est sensiblement différente. Deux lignes étant données, leur produit est déterminé sans que l’unité ne soit posée, mais il est alors une surface rectangulaire. Dans les *Regulae*, la multiplication des grandeurs n’est donc pas l’opération interne nécessaire à la constitution de la géométrie algébrique. Pourtant, lorsqu’il faut faire le produit de trois grandeurs, le rectangle-produit des deux premières est transformé en une ligne pour légitimer l’expression géométrique du produit de *n* grandeurs. L’exemple proposé est ‘sans problème’ puisque les grandeurs sont comme 2 et 3, le rectangle-produit étant évidemment formé de six carrés-unités. Descartes exprime alors le produit comme une ligne de valeur 6 et le calcul peut se poursuivre avec la troisième grandeur. Mais que se passe-t-il lorsque les deux grandeurs sont incommensurables? Que vaut le rectangle-produit? Il peut certes être dessiné mais il ne peut être représenté en ligne-produit équivalente.

Dans la *Géométrie*, le recours au rectangle disparaît au profit d’une construction directe en ligne. Cette construction exigeant le choix d’une ligne-unité *qui peut ordinairement être prise à discrétion*. Deux questions surgissent inévitablement.

1) Une grandeur étant donnée, l’unité est-elle déterminée?

Si cette grandeur était numérique, la réponse serait indécise. Dans le cas d’une mesure rationnelle, on doit répondre oui (il est ‘euclidiennement’ possible de construire la grandeur unité, à partir d’une grandeur de mesure rationnelle). Dans le cas contraire, on doit répondre négativement. Si cette grandeur n’est pas numérique, la réponse est naturellement négative et l’unité est arbitrairement choisie.

De ceci, nous tirerons argument pour nous persuader que les mathématiques de Descartes -et singulièrement la *Géométrie* - évitent la considération des nombres qui sont en quelque sorte les grands absents de cette science. La décision de ne pas constituer une mathématique des nombres est plus radicale encore dans le traité de

1637 que dans les œuvres précoces, comme le montrent les exemples numériques relativement courants des *Regulae*[132].

2)Le choix arbitraire de l'unité a-t-il des conséquences problématiques?

L'ensemble que Descartes munit de l'opération multiplicative (et de ses opérations dérivées) n'est pas numérique mais il n'est pas non plus constitué par les segments ou les 'lignes droites'. Les éléments de cet ensemble sont des grandeurs graduées, des 'lignes droites' rapportées à une longueur-unité. En ce sens, il existe une infinité de tels ensembles de base de la géométrie cartésienne; autant que de ligne-unité possibles. La ligne-produit $a.b$ n'est pas identique dans deux ensembles de ce type, distincts. Le problème est réel puisque, deux longueurs a et b étant considérées, la solution de l'équation $z - ab = 0$ est un objet géométrique distinct selon l'unité choisie. On peut donc dire qu'il est géométriquement moins déterminé que dans l'usage ancien. La géométrie de Descartes soumet certes l'algèbre à la géométrie mais, à un ensemble multiplicatif près ou plutôt modulo l'élément neutre fixé.

La question du changement d'unité (ou de graduation) sera plus cruciale encore dans l'examen des conséquences de ceci dans les problèmes de lieux. Une configuration du problème de Pappus étant donnée, le lieu-solution (notion sur laquelle il nous faudra revenir) ne doit pas s'en trouver modifié. L'analyse nous apprend que, si l'équation du lieu est modifiée, le lieu est lui-même indépendant du changement de repère introduit par le changement d'unité. C'est alors l'ensemble des expressions algébriques de la solution qui est infini, pas la courbe qu'elles expriment.

Soit en effet un repère (O,i,j) et un second repère (O, ki, kj). Un même lieu C ayant pour équation $y = f(x)$ dans le premier, aura pour équation $Y = 1/k.f(k.X)$ dans le second. Un point M de coordonnées x et y dans le premier repère a pour coordonnées $X = kx$ et $Y = ky$ dans le second. La vérification de l'équation $y = f(x)$ est équivalente à celle de $Y = 1/k.f(k.X)$ et les lieux sont donc les mêmes[133].

---

[132] Gérard Milhaud a très fortement défendu ce point de vue dans sa *Préface* aux *Notes brèves sur la Géométrie* de Debeaune , A.M., pp.353-367.

[133] On peut ajouter que le rapport des ordonnées aux abscisses est maintenu dans les deux équations: $Y/X = f(kX)/kX = f(x)/x = y/x$. Si l'on fait attention au rôle central de la considération des rapports dans la constitution des équations, on

Lorsque le R.P. Rabuel traite de cette question, dans ses *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*, il propose cependant une surprenante interprétation. Dans un même problème, la ligne-unité peut changer au point qu'elle joue le rôle de variable. *"L'unité est variable ainsi qu'il arrive dans ce lieu au cercle yy= 2ax-xx. Dans les analogies [...] qui donnent le lieu [...] les x qui tiennent la place de l'unité changent à chaque fois"*[134].

LES HOMOGÈNES ET LES PROPORTIONS

Si la géométrie algébrique manipulait des nombres structurés en corps (ou demi-corps), les remarques cartésiennes concernant les homogènes seraient incompréhensibles. Si l'affaire est si considérable pour Descartes, c'est en fait parce que les opérations internes en voie de constitution sont directement issues de la théorie des proportions, or il ne peut y avoir rapport qu'entre grandeurs homogènes. Ce point était déjà annoncé dans la règle XVIII notamment. La suite du passage que nous avons cité plus haut est explicite; si l'unité est la base de toutes les relations, c'est *"qu'elle occupe le premier degré dans la série des grandeurs en proportion continue et que les grandeurs données se situent au second degré, tandis que les grandeurs cherchées se trouvent au troisième, au quatrième et aux degrés suivants si la proportion est directe; alors que, si elle est indirecte, la grandeur cherchée se trouve au second degré et aux degrés intermédiaires, tandis que la grandeur donnée se trouve au dernier."*[135]

En effet, a et b étant donnés, $z = a.b$ ne signifie rien d'autre que $z{:}a :: b{:}1$. z est donc homogène à a et non à $a.b$, ce qui entraîne que l'écriture $z = a.b$ n'a de sens que si elle est pensée comme $z.1 = a.b$. L'intervention de l'unité est ainsi la garantie que, dans cet ensemble non numérique, la multiplication (ou la division) puisse être définie dans le respect des homogènes. Le bénéfice est au demeurant celui-ci: l'opération peut se poursuivre en dimension quelconque. Nous sommes, avec la *Géométrie* , non seulement dans un moment décisif de constitution de la géométrie algébrique, mais -et c'est peut-être

comprend l'assurance de Descartes quant à la possibilité du choix arbitraire de l'unité.

[134]Claude Rabuel, p.13. En effet, on écrira x:y::y:(2a-x). 2a est donnée, quelque soit la longueur de x-unité, y sera construit selon la cinquième opération-construction canonique du Livre I de *La Géométrie*.

[135] Règle XVIII, G.F.1, p.195

l'essentiel- dans le moment si difficile à repérer de l'histoire des mathématiques où la théorie des proportions laisse la place au calcul algébrique par un élargissement de la notion de nombre (la raison eudoxo-euclidienne accomplit sa mue en nombre rationnel). On sait bien qu'en théorie des proportions, il n'y a pas véritablement d'opération, mais un ensemble de règles de conservation des proportions. La *Géométrie* de Descartes est bel et bien bâtie sur la grande doctrine eudoxo-euclidienne des grandeurs continues, mais elle parvient à y greffer un élément neutre et une multiplication.

Les objets élémentaires de la géométrie algébrique sont donc définis, dans un entre-deux qui n'est plus strictement géométrique (pure étendue), ni numérique. La réussite considérable de Descartes sur ce point est d'avoir doté ses grandeurs graduées (qui ne sont ni des nombres ni des lignes) de l'opération interne multiplicative, grâce à la place centrale donnée à l'élément neutre de cette opération. Si l'on voulait être tout-à-fait strict, il faudrait reconnaître qu'il n'y a pas, dans la *Géométrie*, de multiplication mais la recherche d'une quatrième proportionnelle. Comme on l'a vu, à un isomorphisme près, la production de cette quatrième proportionnelle fonctionne comme une opération interne bien déterminée et étend -de fait- aux grandeurs continues les algorithmes du calcul algébrique. Avec Descartes, les mathématiques ont des racines strictement euclidiennes, mais elles porteront des fruits bien au delà de ce qui était admis dans les treize livres de l'alexandrin.

Parfois négligé dans le commentaire moderne, cette question du segment unité et des homogènes est pourtant apparue centrale à un très pertinent et crédible commentateur de la *Géométrie*, à savoir Florimond Debeaune qui, dans ses *Notes brèves sur la géométrie*[136]écrit: *"Il faut maintenant expliquer pourquoi nous devons donner autant de dimension ou lettres à tous les termes d'une équation. Et cela est manifeste de soi-même lorsque nous entendons par les*

[136]Ces *Notes brèves* ont été rédigées par Debeaune en 1638-39 et elles reçurent l'approbation expresse, voire enthousiaste de Descartes. Sur l'histoire de ce texte, de sa traduction latine et sa publication par Van Shooten en 1649 et 1659, ainsi que sur les réactions de Descartes à ces notes, nous renvoyons à *Descartes*, Correspondance, par Ch.Adam et G.Milhaud, P.U.F., Paris, 1941, Tome III, pp. 323-401.

termes, des surfaces ou des corps, puisqu'il n'y a aucun rapport ni raison entre les quantités hétérogènes, et que les espaces ou les corps sont toujours désignés par un égal nombre de lettres qui est le même que celui de leurs dimensions.

Mais il est expédient de faire de même lorsqu'on ne désigne que des lignes par les termes, pour rendre la méthode plus universelle, et beaucoup plus commode. car on n'y est nécessairement astreint lorsque la ligne qui doit être prise pour l'unité est indéterminée, c'est-à-dire qu'on veut laisser à discrétion de prendre telle ligne qu'on voudra pour l'unité. Et cela est aisé à concevoir, d'autant que si nous prenons une ligne comme a pour l'unité, les lignes b^2 *et* d^2 *par exemple seront dénommées autant qu'elles ont leur rapport à cette ligne a, et si on suppose une autre ligne que a pour l'unité encore que b et d soient les mêmes lignes,* b^2 *et* d^2 *seront diverses des précédentes, et partant, si on voulait conférer la ligne b avec* d^2*, puisque* d^2 *est diverse selon qu'elle est rapportée à diverses lignes qu'on peut prendre pour l'unité et que la même ligne b (demeure toujours, il est évident que la même ligne b) n'a pas toujours le même rapport avec la ligne* d^2*. Au contraire, elle les a divers selon les diverses lignes qu'on peut prendre pour l'unité. Ainsi des autres Mais quelque ligne qu'on prenne pour l'unité, la ligne indéterminée qu'on conçoit pour* b^2 *a toujours un égal rapport et raison à* d^2 *qui est toujours le même que celui du carré de la ligne b , au carré de la ligne d, et ainsi de tous les autres, comme il a été démontré ci-dessus.*

Et il est bien plus général et commode de laisser ainsi l'unité indéterminée et à sa discrétion, pour après, prendre pour elle à sa commodité telle ligne qu'on voudra, que de la déterminer en prenant pour elle une ligne certaine dès le commencement de l'opération, joint que cela sert beaucoup à éviter la confusion et à diriger le calcul et empêcher les fautes qu'on y pourrait commettre. Mais quand l'unité est déterminée, alors on n'est pas obligé de donner autant de lettres aux uns qu'aux autres termes de l'équation, parce que l'unité les supplée partout où il y en a moins, car l'unité multipliant ou divisant les espèce ne les change point, mais si elle n'y est exprimée, elle y peut être sous-entendue, et de cela il y a plusieurs exemples en cette géométrie"[137].

[137]Id. pp.372-3.

On constate en effet que jusqu'à la fin du livre troisième, la considération de l'unité exige de respecter rigoureusement les règles de l'homogénéité des équations. Donnant les règles générales de résolution des problèmes solides, Descartes indique ainsi qu'il faut réduire l'équation *“à telle forme,* $z^3 = apz +/- aaq$ *si la quantité inconnue n'a que trois dimensions, ou bien à telle* $z^4 = apzz +/- aaqz +/- a^3r$*, si elle en a quatre, ou bien, en prenant a pour unité, à telle,* $z^3 = pz +/- q$ *et à telle* $z^4 = pzz +/- qz +/- r$ *…”*[138].

Si les opérations algébriques se peuvent rapporter à des constructions, en quoi sont-elles nécessaires et ne devrait-on pas se passer d'elles, comme méthodes et objets un tant soit peu indépendants?

Non répond Descartes et *“souvent, on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule”*[139]. Suivent, en quelques lignes brèves, les indications principales des notations algébriques adoptées ou mise au point par l'auteur. Ce ‘retour’ algébrique est évidemment important et correspond au programme annoncé dès la *règle XVI* où l'analyse des anciens était stigmatisée parce que trop *“astreinte à des considérations de figures* et ne pouvant *exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination”*[140]. L'enjeu est de taille et nous y repérons une ‘économie de pensée‘ que Descartes exprimait ainsi: "*Par ce système, non seulement nous ferons l'économie d'un grand nombre de mots, mais encore, et c'est le principal, nous rendrons manifeste les termes de la difficulté sous une forme si pure et si dépouillée que, sans que rien d'utile n'y soit omis, on n'y trouvera rien non plus de superflu, et qui risque d'accaparer inutilement la capacité de l'esprit lorsqu'il lui faudra embrasser plusieurs choses à la fois*" [141].

Voici qui peut libérer notre esprit: *«Pour que nous ne soyons pas contraint d'immobiliser une partie de notre attention pour lui rendre sa fraîcheur, tout en vaquant à d'autres pensées, l'art y a très heureusement ajouté l'usage de l'écriture, grâce au secours de cette dernière, nous ne confierons ici absolument rien à la mémoire, et nous*

---

[138]A.T., p.465
[139] A.T. p.371. Corpus, p.334.
[140]AT. X, p.455.
[141] Règle XVI, A.T. X, p. 455.

préserverons tout entière notre fantaisie libre pour les idées présentes en inscrivant sur le papier tout ce qu'il faudra retenir, et cela par des signes très concis, afin de pouvoir les passer distinctement en revue l'un après l'autre, conformément à la neuvième règle, les parcourir tous ensuite par un mouvement très rapide de la pensée conformément à la onzième, et prendre, du plus grand nombre possible d'entre eux une intuition simultanée."[142]

Les caractères de l'algèbre n'ont pas d'indépendance par rapport aux segments qu'ils signalent et rappellent. Aussi, nous ne partageons pas l'idée selon laquelle ces pages libèrent l'algèbre du modèle géométrique[143].

Il peut être tentant de voir, dans les cinq opérations de l'algèbre d'une part, dans les cinq constructions géométriques élémentaires d'autre part et dans leur stricte correspondance, l'idée d'une communauté de structure de ces deux domaines de la science mathématique. Par ce moyen Descartes n'aurait pas seulement éclairé l'un par l'autre, mais il aurait cherché à mettre en évidence un parallélisme de structure entre l'algèbre et la géométrie[144]. Dans les versions qu'il publie, en 1649 puis 1659 et 1661, Van Schooten semble

[142] Règle XVI, A.T. X, p.455. La brièveté de l'exposé des règles de l'algèbre dans la *Géométrie* est extrême. On aurait tort de croire que ces manipulations allaient de soi pour le lecteur de 1637 et c'est pourquoi l'auteur de *L'introduction à la méthode de géométrie de Monsieur Descartes* y revient en détail pour montrer combien, *"un jeune qui souhaiterait s'aventurer dans l'étude de la géométrie cartésienne, et qui serait déjà familiarisé avec les Eléments d'Euclide, devrait apprendre, dès le début les éléments du calcul algébrique"*. Aldo Brigaglia, p.136. L'identité de l'auteur de *L'introduction* n'est pas certaine: Descartes lui-même ou son ami et voisin Haestrecht? Elle a été écrite en 1638.

[143]*"Ce sera surtout avec la Géométrie que l'algèbre prendra un rôle libéré du modèle géométrique, faisant ainsi valoir et reconnaître des régions propres et l'efficacité de ses propres méthodes. Le symbole de la conquête de cette autonomie est la définition cartésienne du produit de deux grandeurs (segments), par l'intermédiaire de l'introduction du segment unitaire. Comme le note justement Descartes, le produit n'est plus équivalent à la construction d'un rectangle, mais à la détermination de la quatrième proportionnelle entre les segments en question et le segment unité. Grace à cette règle extrêmement simple, la représentation algébrique se dégage, des principes, comme celui de l'homogénéité, qui en avaient sanctionné la stricte subordination à la géométrie"*. Aldo Brigaglia, p.136

[144] C'est l'idée qui apparaît fortement dans le travail de Scott.

bien avoir été de cet avis[145]. Si elle est effectivement à l'œuvre dans *La Géométrie*, cette idée ne doit pourtant pas être surestimée. En effet, la notion de 'base axiomatique' d'une théorie mathématique n'est pas du tout perceptible dans cet essai et n'aurait d'ailleurs que peu de cohésion avec les conceptions générales cartésiennes concernant la logique et les premières notions constitutives d'une science.

LA MISE EN ÉQUATION

L'ensemble opératoire des grandeurs graduées ayant été constitué, il faut *en venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes*. On peut distinguer cinq moments nécessaires au succès de la méthode de résolution d'un problème de géométrie par sa mise en équation.

-nommer les objets géométriques (par des lettres).

-donner un même statut logique à ceux qui sont connus et à ceux qui ne le sont pas.

-parcourir la difficulté selon l'ordre naturel des dépendances mutuelles entre ces objets.

-identifier deux expressions (c'est-à-dire deux dénominations algébriques) distinctes concernant en propre ces objets. Cette identification est justement une équation et un problème donné peut en comprendre plusieurs (la différence entre leur nombre et le nombre des lignes inconnues mesure la détermination du problème dit Descartes).

- enfin, démêler les équations (nous dirions les résoudre) par les méthodes générales de l'algèbre.

Une difficile question d'algèbre théorique se profile ici, qui sera reprise au livre III. Soit un problème à n lignes inconnues; si l'on a n équations, le problème est entièrement déterminé. Si l'on a (n-p) équations, le problème n'est pas entièrement déterminé, ce qui signifie que p lignes peuvent être arbitrairement choisies et fixées et, à ce choix, correspondra une solution résiduelle. Que l'on soit dans l'un ou l'autre cas, la procédure doit, en fin de compte, nous mener à une équation polynomiale -dite 'équation démêlée- à une inconnue de type $P(z) = a$.

---

[145]"*En substance,* -écrit Aldo Brigaglia-*Van Schooten veut démontrer la parfaite traductibilité du langage algébrique en langage géométrique et vice-versa*" , p.141

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES PLANS

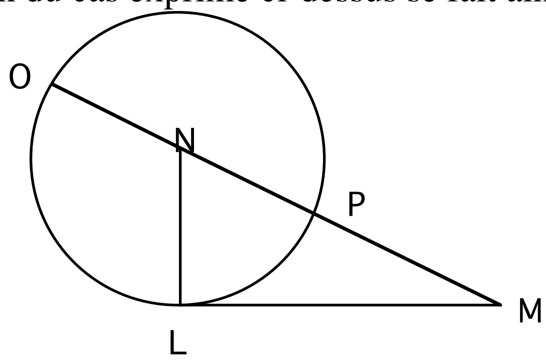
Reprenant la terminologie classique, Descartes traite alors complètement des problèmes plans en leur associant deux propriétés, l'une reprise de la géométrie ordinaire selon laquelle ces problèmes se résolvent à l'aide de droites et de cercles et l'autre -affirmée- selon laquelle la dernière équation (ou *équation démêlée*) que fournit sa méthode est du second degré à une inconnue. Des procédures algébriques et géométriques standart vont être proposées pour éclairer complètement les questions qui se ramènent à une équation du second degré à une inconnue.

Soient donc les équations

$z^2 \infty az + bb$ *ou* $yy \infty -ay + bb$ *ou* $z^2 \infty az - bb$[146]

Le calcul algébrique fournit l'expression des lignes-solutions, du type $z \infty 1/2\ a +/- \sqrt{1/4\ aa + bb}$ (pour la première) et Descartes donne alors -dans chaque cas- un moyen géométrique de construction, à la règle et au compas, de la ligne z ainsi exprimée.

La construction du cas exprimé ci-dessus se fait ainsi:

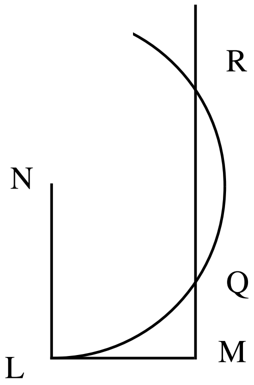


On trace un triangle rectangle dont un côté est LM = b, l'autre LN = a/2. L'hypoténuse est donc NM $= \sqrt{1/4\ aa + bb}$.

On trace le cercle de centre N et de rayon NL. La ligne MN, prolongée, coupe ce cercle en O et, évidemment, MO $= 1/2\ a +/- \sqrt{1/4\ aa + bb}$, soit la racine cherchée.

Le cas suivant où les racines z sont données par $z = 1/2\ a +/- \sqrt{1/4\ aa - bb}$ fait appel à la ‘puissance d'un point par rapport à un cercle’, propriété euclidienne extrêmement utilisée dans les constructions.

[146]Le cas $yy \infty -ay - bb$ n'étant pas examiné comme ne donnant en aucun cas de solution positive.



On trace Le cercle de centre N et de rayon NL = *1/2a*. Soit LM le segment de longueur *b* tangent au cercle en L. Soit la parallèle à LN passant par M. Son éventuelle intersection en Q et R avec le cercle donne les éventuelles racines par MQ et MR.

En effet, ML^2= MQ.MR et MQ + MR = 2.LN (ce qui correspond bien à la somme et au produit des racines trouvées).

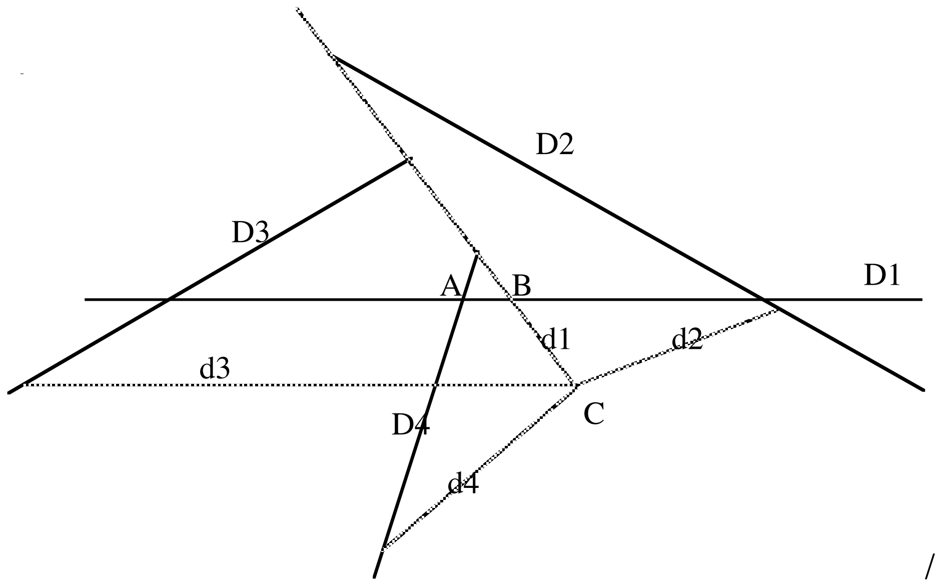
Une chose est donc d'avoir identifié l'expression algébrique de la solution, une autre est d'en donner une construction. Ne nous y trompons pas, pour Descartes ‘trouver la solution’, c'est construire la ligne. La méthode consiste à confier une étape de la résolution à l'algèbre pour enfin légitimer, valider cette procédure scripturale par la construction d'une ligne. Ce moment intermédiaire est toutefois de la plus haute importance puisque c'est par lui qu'est révélé l'ordre sous-jacent aux problèmes posés. L'expression algébrique fournit les moyens de regroupement qui, précisément, manquaient aux anciens. Leurs seules méthodes de constructions -erratiques- sont certes vraies, mais les voici enfin organisées par la *vraie méthode*.

LE PROBLÈME DE PAPPUS

Pappus, commentateur du IV^{e} siècle de notre ère, a transmis dans sa fameuse *Collection* un problème auquel s'était déjà attaqué Euclide. Apollonius avait noté l'insuffisance des résultats euclidiens puisqu'il y est incomplètement construit par rapport à trois et quatre lignes *“si ce n'est partiellement et par chance”*. A son tour, Pappus signale que l'effort de ce dernier ne fournit que des résultats partiels. Il donne effectivement des résultats plus généraux mais avoue n'être pas en mesure d'aller au delà du ‘problème en quatre lignes’. On voit donc le poids de la tradition et l'ampleur de la gageure dans l'affirmation cartésienne selon laquelle sa méthode donnera l'ensemble des solutions de ce problème, pris dans sa plus grande généralité. C'est, tout à la fois, s'inscrire dans la tradition et manifester qu'il la surpasse radicalement.

Etant donnée l'importance de ce problème, dans l'histoire des mathématiques comme dans l'*Essai* que nous commentons[147], il est nécessaire d'en exposer précisément les termes dans un langage moderne qui -et c'est justement une des leçons essentielles de la *Géométrie*- est très fidèle à l'exposé cartésien.

Soient quatre droites coplanaires D_1, D_2, D_3, D_4 données de position, un point C étant considéré, on note d_1, d_2, d_3, d_4, les longueurs des segments joignant C à D_1 (respectivement 2, 3 et 4), sous un angle donné.



On fixe alors le rapport des produits $d_1.d_2$ à $d_3.d_4$.

Pour Descartes le problème admet deux parties distinctes. La première revient à trouver un point C correspondant au rapport fixé. La seconde demande que soit déterminée la ligne où doivent se trouver tous les points convenables[148].

Tel que nous venons de l'exposer le problème est dit ‘à quatre lignes’. Si trois lignes seulement sont données, le rapport fixé sera de $d_1.d_2$ à $(d_3)^2$. Pour cinq lignes, le rapport sera $d_1.d_2.d_3$ à $d_4.d_5.k$ (k étant une ‘ligne donnée’, nécessaire pour respecter la loi des

---

[147]Jules Vuillemin n'hésite pas à écrire que *“toute la* Géométrie *de Descartes est destinée à résoudre, par une méthode nouvelle, analytique et non plus synthétique, ainsi qu'à généraliser le problème de Pappus”* J.Vuillemin, p.99.

[148]M. Unguru a montré en quoi cette manière de poser le *Problème de Pappus* par Descartes, modifiait le problème lui-même. Là où Pappus étudiait des segments, des aires de rectangles ou des volumes de prismes, Descartes étudie des ordonnées ou des lieux géométriques, caractérisés par leur équation.

homogènes). Sans doute n'est-il pas nécessaire d'en dire davantage pour faire comprendre que le problème de Pappus peut être généralisé pour *n* lignes, en notant l'adaptation nécessaire lorsque *n* est impair.

Une des droites est prise comme 'axe des abscisses', un point (*A*) est pris comme origine et une direction détermine les ordonnées. Un point *C*, solution du problème étant cherché, on lui associe deux coordonnées $AB=x$ et $BC=y$ (*BC* est la première des 'lignes' impliquée dans l'analyse du problème). Descartes montre alors, à l'aide de considérations simples mobilisant les lignes et les angles donnés et connus que toutes les autres lignes que l'on considère dans le problème (celles qui joignent C à une des droites données, sous un angle donné) *"se peuvent donc toujours exprimer chacune par trois termes, dont l'un est composé de la quantité inconnue y multipliée ou divisée par quelque autre connue, et l'autre de la quantité inconnue x, aussi multipliée ou divisée par quelque autre connue, et la troisième d'une quantité toute connue. Et pour les signes + et -, qui se joignent à ces termes, ils peuvent être changés en toutes les façons imaginables"*[149]. Autrement dit, l'expression algébrique de chacune des lignes d_i impliquée dans l'analyse du problème est du type ay +/- bx +/- c (où *a*, *b* et *c* sont connues). En outre, la première de ces lignes ($BC=y$) ne fait pas appel à l'inconnue *x*.

Examinons (car, qui peut le plus, peut le moins) la situation pour le problème à cinq lignes (sauf si les cinq sont parallèles, ce qui constitue un cas particulier). La proportion est du type: $d_1.d_2.d_3 = \alpha.\ d_4.d_5.k$ (ou α est le rapport fixé).

On obtient alors dans le premier membre un polynôme de degré 3 en y et de degré 2 en x; dans le second membre, un polynôme de degré 2 en y et x.

Dans la première partie du problème de Pappus -version Descartes- il s'agit de construire un point convenable. On fixe donc y arbitrairement et l'on dispose d'une équation générale à une seule inconnue *x* de degré 2, soit

$$x^2 = {}^{+}/_{-}\ ax\ {}^{+}/_{-}\ b^2.$$

Le problème de Pappus, jusqu'à cinq lignes, produit ainsi une équation qui ne monte pas au delà du second degré. Ces équations ont

---

[149] A.T.VI, 385. La manière dont s'y prend Descartes pour parvenir à ce résultat a été exposée, fort clairement et complètement, par exemple par Jules Vuillemin, pp.102-104.

justement été résolues dans les pages précédentes[150] où l'on a vu que leurs solutions étaient constructibles à la règle et au compas. Elles relèvent des problèmes plans.

Voici qu'apparaît une méthode de classification des problèmes. En effet, dit Descartes, *“lorsque la question est proposée en six, ou 7, ou 8 ou 9 lignes, on peut toujours trouver les points cherchés par la géométrie des solides; c'est-à-dire en y employant quelqu'une des trois sections coniques*[151]*”*. De quoi s'agit-il?

En neuf lignes, la proportion est du type $d_1.d_2.d_3.d_4.d_5 = \alpha.\ d_6.d_7.d_8.d_9.k$

Selon les mêmes considérations que précédemment, on aura pour équation résiduelle un polynôme de degré 4 en x (y étant à nouveau fixé arbitrairement). Descartes pense être en possession d'une règle permettant de réduire *“au cube toutes les difficultés qui vont au carré de carré”*[152]. On pourrait donc rapporter ces problèmes de Pappus aux équations de degré au plus égal à trois; ils constituent ainsi un genre commun, résoluble, c'est-à-dire constructible à l'aide des coniques. Cette dernière propriété sera établie au livre III[153].

Ainsi va la classification: les problèmes en 10, 11, 12 ou 13 lignes seront rassemblés en un même genre, constructible à l'aide *“d'une ligne courbe qui soit d'un degré plus composée que les sections coniques…“*[154]

“Et ainsi à l'infini” conclu Descartes.

Avant de quitter le premier Livre, on signalera que la seconde partie du problème de Pappus est déjà évoquée qui consiste à étudier les lieux associés à une configuration donnée, c'est -à-dire tous les points solutions. Tous ces points se rencontrent en une ligne d'un genre déterminé: droite et cercle, puis conique, puis ligne d'un degré plus composé que les coniques etc. Un second classement sera alors nécessaire; mais, ce qui est clairement affirmé est l'idée selon laquelle, n'importe quelle ligne d'un certain genre est solution d'une configuration de Pappus. Ainsi, il n'y a pas de conique qui ne

---

[150]Voir le §‘problèmes plans’.

[151]A.T. VI, 381, sauf dans le cas, lui aussi particulier où les neufs lignes sont parallèles. Le cas des cinq lignes parallèles entrant, par contre dans cette catégorie.

[152]A.T.VI, 395.Cette règle n'est pas vraiment établie par Descartes.

[153]Cf. ci-dessous, pp.87-88.

[154]A.T.VI, 382.

corresponde pas à un certain problème de Pappus. Autrement dit, toutes les courbes algébriques sont des courbes ‘pappusiennes’[155]. On constate donc qu'aux yeux de Descartes, ce problème n'est pas seulement l'occasion de manifester l'efficacité de la géométrie algébrique mais plus encore qu'il est un véritable creuset des objets géométriques que sont les courbes ‘recevables’ en géométrie.

Il est clair en outre que la satisfaction de Descartes vient de ce qu'il fait fonctionner un double critère d'ordre dans la géométrie: un ordre qui se manifeste dans le degré des équations qui fournissent la solution des problèmes et qui permettent un classement de ces problèmes et un ordre qui se manifeste dans les courbes nécessaires à la résolution des problèmes du même genre. Outre les problèmes (plans, solides, sursolides …), les courbes sont elles aussi ordonnées (cercle et droites, coniques, d'un degré plus composées…). On ne perdra pas de vue aussi que le ‘creuset pappusien’ ne peut fournir que des courbes algébriques. Aussi grand que soit le nombre des lignes du problème, la proportion n'induira jamais qu'une équation algébrique.

[155]Thèse exposée en A.T. VI, 381 et dont la fausseté ne sera démontrée que bien plus tard. Voir ci-dessous, au Livre II, p.72.

LIVRE SECOND

DE LA NATURE DES LIGNES COURBES

Il n'a pas été question de courbe dans le livre premier. Les objets principaux de l'étude en cours n'ont donc été qu'évoquées. Le creuset des courbes cartésiennes, le problème de Pappus, n'a été examiné que sous son premier aspect qui ne fait connaître que des points-solutions isolés. Sa seconde partie, d'où surgiront les courbes acceptables en géométrie, ne peut être présentée sans que n'ait été exposée la nature des objets solutions. Le début du second livre consiste donc en un vaste excursus entre la première et la seconde partie du problème de Pappus.

N'importe quelle ligne courbe ne peut pas prétendre au statut d'objet géométrique car ce statut suppose d'être connaissable, recevable. Nous devons alors savoir *“quelles sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en Géométrie”*[156].

Selon Descartes, les anciens auraient fixé des critères de recevabilité ou d'irrecevabilité des courbes[157]. Les premières ayant été qualifiées de géométriques, les secondes de mécaniques. Le principe de division des courbes en deux classes va demeurer mais la frontière entre elles sera modifiée par l'auteur de *La géométrie*. Les anciens ont en effet rejeté parmi les mécaniques trop de courbes qui sont parfaitement connaissables[158].

Les courbes, associées à des problèmes plans puis solides et enfin linéaires sont de plus en plus composées. La considération des instruments nécessaires à la construction des problèmes en question a largement contribué à fixer la limite de ce qui était géométrique. Les seuls instruments recevables selon la tradition classique auraient été la règle et le compas, les autres machines concevables n'ayant pas la pureté exigible en cette science ni la compatibilité nécessaire avec les axiomes de la Géométrie. Des courbes produites par d'autres instruments étant dès lors mécaniques.

Dans leur grande majorité, les géomètres des XVI^{e} et XVII^{e} siècle, semblent interpréter la constructibilité par règle et compas comme un principe théorique explicite, comme un impératif dûment exigé par les

---

[156]A.T., p.388

[157]On a vu que cette lecture des anciens était fort sujette à caution, d'abord parceque la notion de courbe géométrique n'apparaît pas comme établie et considérée comme telle dans la géométrie classique grecque.

[158]Faire une note sur la recevabilité chez les anciens

anciens pour décerner le qualificatif de géométrique aux lignes candidates. Il n'est cependant pas sûr que la doctrine ait été si bien établie pour les classiques eux-mêmes. La restriction à ces deux instruments idéaux n'est pas explicitement formulée par Platon ; elle lui est attribuée par Plutarque, dans un texte bien postérieur sur Archimède. Quoiqu'il en soit, la tradition, renforcée au moins depuis Pappus d'Alexandrie, ne reconnaît le caractère idéal exigible en cette science pure qu'à la règle et au compas[159].

Cet argument est vivement combattu par Descartes car la règle et le compas ne sont rien d'autre que des machines et rien n'empêche de concevoir d'autres machines abstraites qui mettent en jeu des situations géométriques aussi rigoureuses que la règle et le compas.

Arrêtons-nous un moment sur la critique de l'obstacle ‘axiomatique’ dressé par les anciens. Descartes reconnaît l'emploi explicite des postulats 1 et 3 d'Euclide, mais il détecte l'usage d'un postulat supplémentaire implicite selon lequel un cône donné pouvait être coupé par un plan donné. Il ne voit pas d'inconvénient à l'adopter mais alors, comment lui refuser -à lui- une demande supplémentaire qui ne lui *“paraît en rien plus difficile”*?*“Il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres”*[160]. Il est exceptionnel que Descartes engage une discussion sur les ‘premières demandes’. Il aurait tout aussi bien pu remarquer qu'en général, les postulats d'existence sont absents du corpus euclidien, notamment d'existence par intersection (de deux cercles, d'un cercle et d'une droite…). En réalité, une telle discussion ne l'intéresse guère, mais il entend justifier une procédure déterminante de sa *Géométrie*, le recours aux lignes générées par intersection mouvante[161].

Face au même problème, Viète avait proposé une solution fort différente. Les problèmes constructibles à la règle et au compas s'appuient sur les deux postulats 1 et 3 d'Euclide; il faut, pour légitimer

---

[159]On lira avec profit les rappels et observation de Serfati sur cette question, in Serfati, 1993, pp.201-202 et notes, 16 à 20.

[160]A.T., p. 389.

[161]Nous sommes bien loin des exigences et des réticences euclidiennes concernant l'acceptation du mouvement en géométrie. Voir sur cette question Vitrac, *Les Eléments d'Euclide*, vol. I, pp.nnn et Jullien, *Les Eléments de Géométrie de Roberval*, pp.nnn.

les constructions d'ordre supérieur, ajouter un postulat selon lequel, deux droites et un point extérieur étant donnés, on peut , à partir de ce point, tracer une droite qui coupe les deux premières en formant un segment de longueur donnée. Il montre alors que la trisection de l'angle et la construction de deux moyennes proportionnelles sont résolubles[162].

La notion de recevabilité se sépare ainsi complètement de la notion de composition et de complexité. Si le critère de simplicité et de composition est appelé à jouer un rôle important, il n'est pas adéquat pour décider de la recevabilité des objets géométriques. Ceux-ci peuvent très bien être infiniment composés et complexes mais cette composition doit relever d'un ordre rigoureux, vecteur d'exactitude. Comme une chaîne déductive, si longue soit-elle, peut mener à une conclusion exacte à condition que les règles de la méthode aient été respectées, de même l'engendrement d'une ligne courbe peut être fort composé à condition que les règles de composition soient respectées. Ces règles se ramènent en fait à une seule: que le mouvement qui fait passer d'une courbe à l'autre soit entièrement et continuellement déterminé. Dès lors, la connaissance certaine de la première induira la connaissance certaine de la seconde.

"Par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure"[163]. La mesure n'est pas ici à prendre comme une notion numérique mais comme grandeur constructible, telle qu'elle a été présentée au début du livre premier.

Si les anciens n'ont pas admis ce critère, pourtant indiscutable, c'est que dans leur démarche erratique, ils ont très vite (trop vite) rencontré des courbes qui ne répondaient pas à ce critère et, reconnaissant le caractère véritablement mécanique de celles-ci, ils ont généralisé abusivement en donnant ce statut de courbes mécaniques à toutes les courbes trop composées. Ces courbes fautives sont principalement la quadratrice et la spirale et les courbes victimes d'un rejet illégitime sont par exemple la cissoïde et la conchoïde[164].

---

[162]Viète, *Supplementum Geometria*, 1593, *Opera-Edition*, p.240. cf. in Bos 1983, p.336.

[163]A.T., p.389.

[164]Notes sur ces courbes et les raisons pour lesquelles elles sont ou non recevables.

La quadratrice d'Hippias peut être ainsi générée (nous en donnons un cas simple, la modifications de paramètres de départ définit une famille de courbes

Le manque d'ordre dans la science géométrique est donc cause de la pauvreté de son domaine de validité.

Aux deux obstacles relevés, il va être remédié par deux moyens adéquats, soit deux instruments. Un nouveau ‘compas’, producteur de courbes, tout aussi légitime que le compas et la règle et un second instrument ‘compositeur de courbes’.

LE COMPAS À ÉQUERRES GLISSANTES

Le Mesolabum, ou compas à équerre glissantes fut conçu et exposé dans les *Cogitationes privatae* de 1619-20[165] et ne fut jamais construit par Descartes. Cette construction n'est bien sûr pas nécessaire puisque *“la constructibilité est une notion théorique, de droit, qui n'implique nullement la nécessité de fabriquer la machine”*[166].

---

présentant les mêmes ‘qualités’ et ‘défauts’): Soit un carré ABCD; un segment RR', parallèle à DC, descend uniformément, de DC vers AB. Une ligne AS, pivote, uniformément autour de A, de AD vers AB. Les deux mouvements se font en même temps. A chaque instant, le segment RR' et la ligne AS se coupent en un point M. Tous les points M constituent la ‘quadratrice’. Cette courbe est donc réglée par la composition d'un mouvement rectiligne et d'un mouvement circulaire. En terme modernes, cette courbe est dite transcendante et admet une équation polaire en inverse de sinus. Il est possible d'en tracer une infinité de points: à mi-parcours, on peut exactement tracer RR' et AS, donc M; au quart du parcours aussi, aux trois-quarts de même, et à toutes les portions de type $p/2^n$. Pourtant, elle est rejetée par Descartes: en effet, on ne peut en construire un point quelconque. Soit une position quelconque de RR', cette position partage DA dans un certain rapport, ce rapport peut-il être transposé sur le quart de cercle DB, de façon à donner la position exacte de AS? La réponse est non, en raison de la transcendance de π.

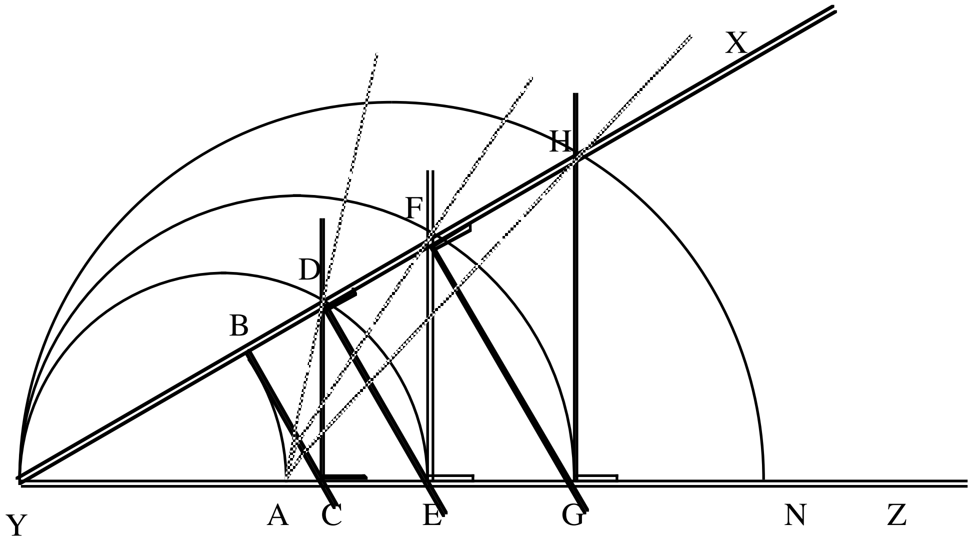
La spirale d'Archimède pose exactement le même type de problème et doit donc être -elle aussi- rejetée.

La conchoïde échappe à cette critique car n'importe lequel de ses points peut être construit. Soit en effet une droite AB et un point O extérieur à cette droite. Une ligne OS pivote régulièrement autour de O et coupe AB en un point R. On fixe une longueur *d* . Pour chaque position de OS, on porte la longueur *d* à partir de R -du même côté, au choix- de la droite AB. On obtient donc une extrémité M du segment RM = *d*. L'ensemble des points M constitue la conchoïde (il y en a deux, une au dessus de AB, l'autre au dessous). Quelque soit la position de R, le point M peut être construit, cette courbe est donc entièrement connaissable: elle est, de ce fait, géométrique pour Descartes.

[165]Un autre instrument cartésien, le compas trisecteur (qui peut être généralisé pour un n-secteur) est examiné in Serfati, 1993, p.209, il n'est pas utilisé dans la *Géométrie*..

[166]A. Serfati, 1993, p.210

Le principe de fonctionnement de cet appareil est clairement identifié: il s'agit d'insérer des moyennes proportionnelles entre deux grandeurs fixées.



Lorsque le compas est fermé, tous les bras de toutes les équerres coïncident. Le point Y est une articulation et les pieds de chaque équerre, sur la ligne droite YZ coulissent, poussés par les cotés de l'équerre précédente, perpendiculaires à la ligne YX.

"On en peut concevoir une infinité [...] qui se poussent consécutivement en même façon"[167]. Si l'on considère alors le parcourt des points B, puis D, E, F, H etc., on reconnait que chacun décrit une ligne courbe dont la première est un cercle.

Cet appareil aura eu trois fonctions dans le murissement de la pensée géométrique cartésienne. Une première fonction permet l'insertion et la construction des moyennes proportionnelles entre deux grandeurs: le compas y parvient effectivement et exactement, mais la démarche est méthodologiquement fautive. Une seconde fonction de résolution d'équations particulières est associée à l'idée erronée d'une possible généralisation. Enfin le compas engendre des courbes, aussi complexes et composées que l'on veuille, mais toutes légitimes en géométrie.

Le compas à équerre glissantes permet effectivement de trouver les moyennes proportionnelles entre deux grandeurs; par exemple, sur la figure présente, YC, YD et YE sont bien les moyennes proportionnelles insérées entre YB et YF. On verra, au livre III que ce moyen -exact- accompagne cependant une faute de méthode: il est en

[167]AT.p. 391

effet nécessaire, en bonne méthode, que les courbes utilisées pour résoudre des problèmes soient les plus simples possibles. Le compas, s'il montre la possibilité de ces constructions, n'en fournit pas les moyens les plus simples (les moins composés). Les points D, F etc. parcourent des courbes plus complexes qu'il n'est nécessaire.; Nous verrons qu'en effet, il en existe de plus simples.

Dans les *Cogitationes privatae*, le compas permet la construction de la racine de l'équation cubique $x^3=x+2$. Cette solution importante est cependant particulière. Descartes ne parvient pas à généraliser le résultat à l'équation $x^3=ax+b$ et se heurte à des problèmes déjà repérés par les algébristes[168]. La encore, les courbes issues du Mesolabum sont utilisées.

La troisième fonction est -de loin- la plus importante. Un ordre de composition des courbes, intellectuellement conçu, apparaît bien ici qui soutient la construction instrumentale proprement dite. Voici qui suffit à établir que les courbes recevables de la géométrie sont bien plus nombreuses que les seules reçues traditionnellement. Nous voici en possession -par un critère de constructibilité ‘appareillé’- d'un énoncé d'existence des courbes géométriques qui peuvent être infiniment composées. D'autres instruments pourraient d'ailleurs nous faire construire et concevoir de telles lignes courbes. Le compas à ce moment précis de la *Géométrie*, ne sert pas à plus. Ce qui est acquis, ici, est une existence; celle d'un ensemble infiniment vaste et composé d'objets légitimes de la géométrie.

A cet ensemble conçu élément par élément, il faut un critère de classement absolument général qui permette de le concevoir tout entier et de distinguer les genres qui en sont les parties. Or, ce n'est pas le Mesolabum (ni un autre instrument) qui fournit ce critère, c'est la mise en rapport des lignes construites (ou à construire) avec les lignes

---

[168]Il s'agit de tenter la réduction à une forme du type $y^3 = a^3$; réduction qui ne fonctionne pas -en général- comme pour le second degré. Descartes ne la résout pas et *“se contente d'examiner des cas ad hoc d'équations cubiques tout à fait particulières”* Serfati, p.212. Nous avons là un exemple précis de la difficulté technique pour assurer la coïncidence des critères de connaissance, par une expression algébrique d'une part, par une construction d'autre part. Ceci n'arrête pas l'architecte-Descartes et ne fait qu'alourdir un peu la charge de travail qu'il entend laisser aux maçons. Il a montré que la résolution d'une cubique peut se faire grace à son instrument producteur de courbes, il a donné des arguments en faveur de la faisabilité générale; cela suffit.

données, ce qui ne signifie pas autre chose que la mise en équation des courbes. La structure de l'équation devant permettre le classement. On notera ici, une répartition très nette et pleine de sens entre le moment strictement constructif-géométrique et le moment classificateur-algébrique. Le premier assure la réalité de l'objet, le second garantit les moyens de le connaître. Au mésolabum de faire connaître l'existence de courbes, à la structure algébrique d'en faire savoir la position relative au sein de la géométrie, de ses problèmes et de ses degrés de complexité[169].

Le degré des équations de courbes détermine les genres que l'on doit distinguer dans ces courbes. Le degré 1 n'est pas évoqué, mais après tout, il ne correspond pas à une ‘ligne courbe’. Les polynômes de degré 2 correspondent aux courbes du premier genre (cercle, parabole, hyperbole et ellipse); ensuite, les degrés vont par deux: les polynômes de degré 3 et 4 correspondant aux courbes du deuxième genre, ceux de degré 5 et 6, à celles du troisième genre, et ainsi à l'infini.

Si ce regroupement par paire nous surprend, sans doute doit-on se rappeler que le problème de Pappus avait mis l'auteur sur cette voie.

LE COMPAS À GLISSIÈRE ET PIVOT

Il s'agit alors de progresser dans l'argumentation de la thèse centrale de *La Géométrie*, selon laquelle le critère algébrique retenu correspond bien à des critères de construction possibles, ordonnées et réglées. Le dispositif suivant doit resserrer cette correspondance affirmée. Ainsi assure Descartes, *“Et en quelque façon qu'on imagine la description la description d'une ligne courbe, pourvu qu'elle soit du nombre de celles que je nomme géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte”* [170].

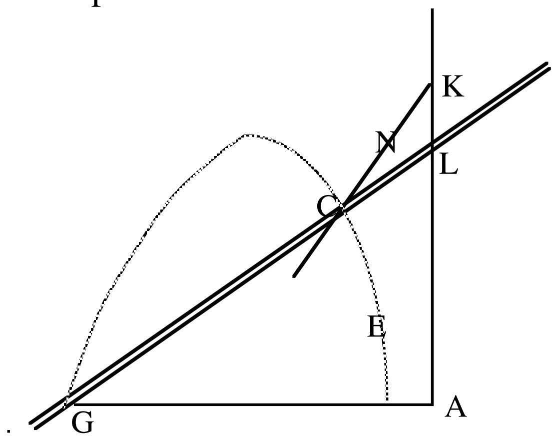
---

[169]Comme le dit H.Bos, *“Pour Descartes, l'algèbre concerne les cinq opérations. A cette époque, les logarithmes, les sinus, cosinus, exponentielles et autres ne font pas partie de l'arsenal des formules algébriques. Ceci signifie que toutes les courbes ne peuvent être représentées au moyen d'une équation”*, Bos,1988, p.350. . Descartes n'imagine que des équations polynomiales -nous dirions algébriques

[170]A.T. VI, p.395.

Rabuel, dans son commentaire, reconnaît la coexistence des deux critères sans les prendre pour équivalents, Rabuel, p. 98, cité in Serfati, 1993, note 93, p.226.

Des exemples, dont Descartes veut croire au caractère générique vont être donnés. Un instrument théorique nouveau va viser l'obtention simultanée d'une courbe construite et de son expression algébrique. Il s'agit des ‘plans glissants’ dont le principe est le suivant: une ligne de départ sera rendue mobile le long d'un axe et son intersection avec une règle articulée produira une ‘ligne plus composée’; les degrés de l'équation de la ligne de départ et de la ligne produite vont prouver que l'on passe d'une ligne d'un certain genre à une ligne du genre suivant. Constructions et équations parcourent ainsi ensemble l'ordre croissant de la composition.



GAK est sur un plan fixe, GL pivote librement autour de G, la droite KN (ligne de départ) fait avec AK un angle constant et KL est aussi une longueur fixée. Lorsque GL pivote, KL glisse le long de AK, et la droite KN rencontre GL en un point variable C. L'ensemble des points C décrit la courbe finale. Le procédé respecte le critère des ‘mouvements continus’, la courbe finale est bien géométrique. Quelle relation entretient-elle avec la ligne de départ? Elle est certes ‘plus composée’, mais encore? La réponse est fournie par l'algébrisation, la mise en équation du problème.

AK est comme l'axe des abscisses et AG comme l'axe des ordonnées. En posant CB = y et BA = x, Descartes obtient, par des considérations de stricte proportionnalité, l'équation

$y^2 = cy - {}^{c}/_{b}\, xy + ay - ac.$

Il s'agit bien d'une courbe du premier genre, c'est une hyperbole.

La Conchoïde ou parabole cartésienne, pour laquelle le double critère semble fonctionner, convainc Descartes à reconnaître ce double critère comme généralement valide (id.).

La suite est une généralisation du procédé. L'instrument est le même; ce qui change, c'est la ‘ligne de départ’. Si, au lieu d'une droite, on fait glisser une ligne du premier genre, par exemple une hyperbole, ou un cercle, ou une parabole, l'intersection avec la règle mobile produit une nouvelle ligne d'arrivée qui est du genre successif[171].

Ici se situe une remarque de grande importance.*“Je choisis* , écrit Descartes, *une ligne droite […] et en cette ligne, je choisis un point […] pour commencer par lui le calcul. Je dis, je choisis, et l'un et l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut, car, […] en quelle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la ligne paraisse du même genre, ainsi qu'il est aisé à démontrer”*[172].

L'auteur a vu que le degré d'une équation ne dépend pas d'un certain type de changement de repère, il est invariant par changement d'axe. Cette notion, qui libère le résultat d'un système particulier de coordonnées sera l'une des plus fertiles de la géométrie analytique.

RETOUR AU PROBLÈME DE PAPPUS

Il est maintenant possible de revenir au problème de Pappus.

Dans la première partie du problème, au livre premier, une équation a été associée à chaque problème. Dans les pages précédentes, l'étude du degré des équations a permis de classer les courbes en genre. Le rapprochement de ces deux résultats va permettre d'associer à chaque problème de Pappus, un genre déterminé de courbe. Descartes obtient donc la liste suivante:

Au problème a quatre lignes au plus, est associée une équation de degré 2 au plus, donc une courbe du premier genre.

Au problème a huit lignes au plus, est associée une équation de degré 4 au plus, donc une courbe du deuxième genre.

Au problème a douze lignes au plus, est associée une équation de degré 6 au plus, donc une courbe du troisième genre.

“Et même, à cause que la position des lignes droites données peut varier en toute sorte, et par conséquent faire changer tant les quantités connues, que les signes + et - de l'équation, en toutes façons imaginable… En sorte qu'il n'y a pas une ligne courbe qui tombe sous

---

[171]Avec un cercle, il obtient la conchoïde de Nicomède, avec une parabole, il trouve la conchoïde parabolique qui est une cubique. Pour plus de détail, on pourra lire Serfati, 1993, p.221 et Bos, 1981.

[172]A.T. 394-5.

le calcul et puisse être reçue en Géométrie, qui ne soit utile pour quelque nombre de lignes"[173]

Cette déclaration est d'importance puisqu'elle pose comme évident que la modification continue des positions géométriques (place et nombre des droites) est comme naturellement associée à une modification correspondante des coefficients des polynômes. On pourrait attendre, à cet endroit, que tout polynôme soit déclaré exprimer une courbe géométrique, ce qui est -au fond- une thèse cartésienne. Mais il faut reconnaître que la formule est plus prudente, puisqu'elle repart de la ligne, qui -si elle tombe sous le calcul et si elle est géométrique- est 'pappusienne'. La proposition selon laquelle toute courbe algébrique (admettant une équation polynomiale) est solution d'un certain problème de Pappus est en réalité fausse, mais la démonstration de ceci mobilise des ressources mathématiques dont Descartes ne disposait pas[174].

Dès lors, on comprend que le problème de Pappus soit, pour Descartes, absolument central. Il constitue un versant géométrique au critère général d'ordre et de classement des courbes. On ne dispose plus seulement de méthodes constructives prouvant l'existence d'un vaste ensemble de lignes courbes géométriques, on ne dispose plus seulement d'un critère algébrique d'ordre et de distinction dans ce vaste ensemble, mais on dispose d'un critère géométrique d'ordre et de distinction. Ainsi, toutes les courbes du premier genre sont, certes associées à un polynôme de degré deux, mais surtout à un problème de Pappus à 3 ou 4 lignes. Les courbes du deuxième genre sont de même associées à un polynôme de degré 3 ou 4, mais surtout à un problème de Pappus à 5, 6, 7 ou 8 lignes, etc.

L'auteur ne se contente pas de cette pétition générale et, dans un assez long passage technique, il étudie la question en trois et quatre lignes. La mise en rapport des lignes connues et inconnues, selon la méthode des coordonnées, donne une équation générale de la forme:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

qui exprime BC en fonction de AB (voir figure p.61).

---

[173]A.T.p.397

[174]H. Bos donne une démonstration complète de ce résultat -quelle que soit l'interprétation que l'on veuille donner du passage cartésien visé- Voir, Bos, 1981,*Appendix 1*, pp. 332-338. Et rappeler que les polynômes ne sont pas tous pappusiens, ce qui fut démontré au XIX^{e} siècle, cf. in Giusti.

A ce moment correspond le passage de la considération des courbes, constructibles ‘par point’, à leur considération comme lieu géométrique exprimé par un polynôme à deux variables. Dans la première situation, les équations à deux inconnues étaient réduites et ordonnées en *y* de façon à faire de *x* une quantité que l'on fixait autant de fois qu'on le désirait. Quelque soit cette valeur, on obtenait la ou les racines correspondantes pour *y;* on avait ainsi autant de points qu'on le souhaitait. Ce critère distinguait justement ces courbes des mécaniques pour lesquelles on ne pouvait connaître n'importe quel point, même si l'on en pouvait connaître une infinité[175]. Il s'agissait d'un critère géométrico-algébrique de recevabilité et de constructibilité des courbes. Maintenant, Descartes s'arrête à l'étude des lieux, considérés globalement, selon la structure du polynôme à deux variables qui lui correspond. La construction n'est plus conçue par point mais par éléments caractéristiques. Ainsi, s'il s'agit d'un cercle, devra-t-on déterminer son centre et son rayon, si c'est une hyperbole, son centre et ses axes ...

Il est à remarquer que -presqu'explicitement- on lit des équations de droites dans ce traité; par exemple la droite IL d'équation $y = m - {}^{n}/_{z}x$ [176].

Une discussion des différents cas permet à l'auteur de reconnaître quand on obtient une conique dégénérée, quand un cercle, quand une des trois sections coniques. Cette discussion montre, en tout cas, que l'on décrit les courbes du premier genre[177]. Le passage technique en question a sans doute posé quelques problèmes à son auteur[178] et il y est fait largement appel aux résultats des anciens sur les coniques et en particulier au premier livre d'Apollonius[179].

Il est alors possible de faire le point. Les équations de degré inférieur ou égal à 2 sont résolues. Les problèmes des anciens en quatre lignes ou moins s'expriment en équations de ce genre. Ces problèmes sont donc entièrement résolus. A l'ancienne classification en lieux plans et solides il est possible de substituer la nouvelle distinction, à savoir que tous ceux-ci sont courbes du premier genre.

---

[175]Voir supra, note 9, p.67.
[176]A.T. p.400.
[177]Voir l'analyse précise des calculs cartésiens in Scott, pp.106-12.
[178]Cf. A Mersenne, in Lettre, III, 69 (ref. Scott)
[179]Voir la ref. à Apoll. in Scott, p. 110.

Un grand problème -le problème de Pappus- est conçu comme générateur des objets de l'algèbre géométrique. Ces objets sont des courbes dont une équation est un polynôme de degré n. La production - et le classement- des expressions algébriques est générale et satisfaisante, selon ce problème. Mais ceci n'est évidemment pas suffisant: il convient de réussir une constructibilité aussi générale pour ces objets. La constructibilité vient d'être réussie pour les polynômes de degré deux, soit pour les problèmes de Pappus à moins de six lignes; elle se fait à la règle et au compas. Il convient d'aller au delà et de s'attaquer aux cas où les équations s'élèvent à des degrés supérieurs. Or, la constructibilité est 'en panne' à partir du degré cinq, car il n'y a en général pas d'équation pour trouver les racines. Elle l'est même souvent pour les degré 3 et 4 où il faut en passer par des racines cubiques, c'est-à-dire, abandonner la règle et le compas.

La suite du Livre II et le Livre III vont tenter de fournir une constructibilité pour les lieux, dont -à ce moment- on ne connaît que la possible expression algébrique. Ces lieux vont être explorés selon deux critères: les compositions de mouvements continus, puis la construction des racines algébriques.

L'auteur examine le cas du problème de Pappus à 5 lignes, non pas dans sa généralité, mais quand les cinq lignes sont parallèles, puis lorsque quatre d'entre-elles le sont.

La première situation, triviale, donne comme solution une ligne droite. La seconde donne à Descartes un argument supplémentaire dans la défense de la thèse principale, puisqu'il réussit d'une part à exprimer algébriquement le lieu solution sous la forme d'un polynôme à deux variables du troisième degré, ce qui -soit dit en passant- confirme l'appartenance de cette solution au second genre et d'autre part, à retrouver la génération, la construction de cette courbe selon la procédure des 'glissières', exposée au début du second livre.

L'équation obtenue selon l'énoncé pappusien est

$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$

Concevant alors une parabole mobile le long d'une des parallèles et une droite 'tournant' autour d'un point fixe, il retrouve l'expression algébrique des intersections de la parabole et de la droite; c'est la même que la précédente. La coïncidence des critères est établie. La courbe solution, du second genre est donc constructible par une parabole:

l'ordre successif est respecté, tant dans la structure algébrique que dans la composition des mouvements générateurs.

L'étude générale de tous les cas est laissée au lecteur, ou plutôt à la postérité. Descartes, qui n'a *“pas entrepris de dire tout… pense avoir assez donné le moyen de les décrire”*[180].

On est ainsi confronté à un exposé qui s'apparente autant à une argumentation qu'à une démonstration. La Thèse générale soutenue n'a pas -en effet- été généralement démontrée, mais elle a été soutenue par l'examen de cas exemplaires qui se veulent suffisants. Répétons-le, ils sont suffisants parce que des ‘raisons générales’ soutiennent, président à cette thèse de la coïncidence des deux critères d'acceptabilité des courbes[181].

L'auteur rappelle encore la raison de son refus d'accepter certaines courbes -la quadratrice et les spirales- On ne peut, par mouvements continus, en construire un point quelconque: *“On ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche”*[182].

Brièvement, un nouveau critère d'acceptabilité de courbes est proposé; c'est la construction ‘par fil’, comme l'ellipse du jardinier. Ces constructions sont acceptables lorsque les parties complémentaires des fils sont des portions rectilignes, dont les rapports peuvent être entièrement connus, ce qui ne s'étend pas aux cas où le rapport s'entendrait entre une portion rectiligne et une portion courbe, *“la proportion qui est entre les droites et les courbes, n'étant pas , et même je crois ne pouvant être [connue] par les hommes”*[183].

---

[180]A.T. p.411.

[181]Pour Descartes, donc, il est établi que les courbes constituées par composition de mouvements acceptables sont algébriques. Peut-on en inférer que ses courbes ‘géométriques’ sont précisément les courbes algébriques? Cette thèse fut généralement acceptée par les successeurs mais ne fut véritablement démontrée qu'au XIX^e siècle. Voir A.B. Kempe, pp. 213-216. Comme l'écrit H.Bos, *“les arguments de Descartes sont ici vagues et non convaincants”*, Bos, 1988, p.367. Ce qui n'est pas étonnant si l'on considère la difficulté du problème

[182]A.T. p.411.

[183]A.T. p.412. Cet argument est utilisé par les auteurs qui estiment qu'il faut dévaluer, chez Descartes, les critères de constructibilité, en faveur du critère d'expression algébrique. La variété des critères de constructibilité témoigne d'une variation, d'une diversité qui les affaibli et leur ôtre la généralité exigée par la méthode. De plus, l'argument selon lequel la proportion du courbe et du droit n'est pas connaissable est destiné à s'évanouir avec les succès des rectifications de courbes qui vont bientôt advenir. Cf. Giusti.

LA MÉTHODE DES NORMALES

Le passage suivant est l'un de ceux dont l'importance est la plus discutée. L'étude des courbes y est menée selon des critères exclusivement algébriques. Selon la lecture que l'on a de *La Géométrie*, on interprètera différemment cet important passage. On peut y voir un excursus dans le projet essentiellement constructiviste de Descartes. Au contraire, la puissance et la généralité de la méthode mise en place est telle qu'on peut aussi y voir l'expression du véritable critère essentiel de la connaissance des courbes: leur expression algébrique. Est-ce donc une parenthèse ou à l'inverse le cœur de *La Géométrie?*

En tout cas, pour Descartes, *“c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'ai jamais désiré de savoir en Géométrie”*[184].

De quoi s'agit-il? Les propriétés, les éléments caractéristiques des courbes sont absolument connus lorsque l'on connaît l'allure de la courbe en chacun de ses points; or cette allure est révélée par la tangente ou, bien sûr, par la normale à la courbe en un point quelconque. La détermination de la normale est ainsi l'attribut essentiel de la courbe, qui la rend connaissable, ainsi que ses autres propriétés secondaires. Si donc, à chaque ordonnée, on sait associer la normale, la courbe est connue. Descartes expose une méthode générale du calcul des normales et donc des tangentes aux courbes admettant une équation algébrique. Le cas de l'ellipse, de la parabole, de la conchoïde sont traités en détail, mais il est net qu'une méthode générale est ici donnée.

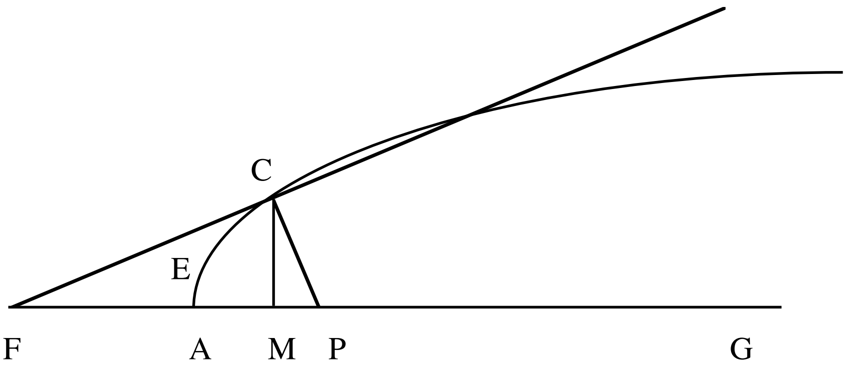
L'exposé de principe qu'en a fait J.Vuillemin est si clair, que nous nous permettons de nous en inspirer ici largement[185].

Soit la courbe CE et CP la normale cherchée. CM, qui joue le rôle d'axe des x, est la perpendiculaire abaissée sur l'axe des y. On pose $MA = y, MC = x, PC = s, PA = v, PM = v\text{-}y$.

On peut d'ailleurs lire cette objection chez Claude Rabuel qui signale qu'en effet, *“Monsieur Descartes ne croit pas la rectification des courbes possible… Mais, dans la géométrie des infiniment petits, le calcul intégral trouve la rectification de plusieurs courbes…”*, Rabuel, p.294.

[184]A.T. p.413.

[185]Jules Vuillemin, pp.57-63. On pourra s'y reporter pour voir le détail des calculs dans les cas examinés par Descartes. Voir aussi Scott, pp.115-118, ainsi que la présentation précise et générale d'E. Giusti.



On a donc: $PC^2 = MC^2 + MP^2$, soit,

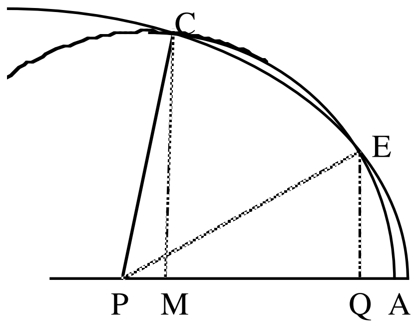
$s^2 = x^2 + (v\text{-}y)^2$ d'où l'on tire $(y\text{-}v)^2 = s^2 - x^2$

L'équation de la courbe, jointe à la précédente, constitue un système dans lequel *y* et *x* sont les coordonnées du point *C*, *s* et *v* les paramètres déterminant la normale cherchée.

On peut éliminer *x* et on obtient un polynôme en *y*. Si l'Equation de la courbe est de degré *n*, alors, le polynôme en *y* est de degré *2n*.

D'autre part, la normale CP peut être considérée comme le rayon d'un cercle de centre P, tangent à la courbe et dont le calcul précédent donne une équation.

Si P, au lieu d'être à 'sa' place, en est *"un tant soit peu plus proche ou plus éloigné"*, le cercle n'est plus tangent, mais coupe la courbe en deux points (comme C et E dans la figure). Il y aura alors deux solutions MA et QA.



Dans le cas où ces deux solutions sont identiques, on a une 'solution double'.

Ce polynôme en y 'lorsque le problème est résolu', c'est-à-dire lorsque le cercle est tangent, admet une racine double en y_o (ordonnée du point où l'on cherche la normale); il est donc divisible par $(y\text{-}y_o)^2$. L'identification des coefficients entre les deux écritures polynomiales donne les (2n+1) équations nécessaires pour trouver les paramètres v et s.

Voyons le calcul pour le cas d'une ellipse.

Rappelons que l'équation générale du ‘cercle’ dont le rayon est la normale est $(y-v)^2 = s^2 - x^2$

Selon Apollonius, (livre I, 13), une ellipse d'axes r et q donnés admet pour équation $x^2 = ry - {}^r/_q\, y^2$

Voici les deux équations formant système.

En éliminant x^2 dans les deux, on obtient, après simplification:

$y^2 + {}^{(qr\,-2qv)}/_{(q-r)} .\, y + q^{(v2-s2)}/_{(q-r)} = 0$

L'existence d'une racine double au point $y = e$ permet de factoriser ce polynôme en $(y-e)^2$ soit $y^2 - 2ey + e^2$ et ensuite d'identifier les coefficients.

On obtient donc: $v = e - {}^r/_q \cdot e + {}^r/_2$

Ceci est vrai, quelle que soit la valeur *e* choisie; on a donc, pour toute ordonnée y choisie, l'expression de *v*, qui est $y- {}^r/_q \cdot y + {}^r/_2$

On pourrait en outre calculer *s*, ce qui n'est pas nécessaire ici pour déterminer la normale.

Nous l'avons dit, ce passage est l'un des plus discuté de la *Géométrie*. A une interprétation trop algébriste, nous pouvons sans doute objecter que l'ensemble des calculs développé ne définit pas les courbes. Au fond, la normale peut être découverte, mais seulement à partir d'une courbe que l'on connaît déjà; dont on connaît déjà, non seulement l'équation, mais encore la construction. Toute sa place est ainsi donnée à l'algèbre, mais dans un arrière-plan géométrique déjà institué. Ce qui, toutefois est à souligner c'est que la connaissance des coordonnées d'un point quelconque d'un courbe est insuffisant pour prétendre avoir une connaissance complète de la courbe. Il y a plus, c'est l'allure de cette courbe qui en est la détermination essentielle, et avec elle un cortège de modes qui complètent la notion: les aires qu'elles comprennent, les diamètres etc.

Il faut souligner l'utilisation de la procédure d'identification des coefficients des polynômes dont Descartes mesure l'importance lorsqu'il signale que *“l'invention de supposer deux équations de même forme, pour comparer séparément tous les termes de l'un à ceux de* *l'autre, et ainsi en faire naître plusieurs d'une seule… peut servir à une infinité d'autres problèmes, et ce n'est pas l'une des moindres de la méthode dont je me sers"*[186]. Il est sans doute juste d'ajouter que cette question est peut-être celle qui a eu le plus d'influence sur de développement ultérieur des mathématiques. Le commentaire et l'usage qu'en fait Claude Rabuel est extrêmement intéressant, qui interprète la méthode cartésienne dans le cadre du calcul des infiniment petits et qui la prolonge de manière à la rendre efficace pour calculer les points d'inflexion des courbes[187].

La méthode pour les tangentes était un enjeu mathématique central au XVIIe siècle. En France, deux auteurs proposèrent une méthode pour les tangentes; il s'agit de Roberval et de Fermat[188]. Celle de Roberval, se situant sur un autre terrain (celui de la composition des mouvements), ne suscita pas de polémique avec Descartes. Il en va tout autrement entre Fermat et Descartes. Sans exposer ici les thèmes de la polémiques, nous pouvons signaler toutefois deux points.

La méthode de Fermat fait intervenir dans les équations des ‘quantités très petites’, notées *e*, qui, dans le cours de l'étape finale du calcul, peuvent être négligés. Cette sorte de passage à la limite, qui s'accompagne d'une relation dite ‘d'adégalisation’ ne pouvait satisfaire le philosophe des idées claires et distinctes. Descartes cependant fit porter la controverse sur un aspect où il avait tort et mésinterprétait la démarche de Fermat. Il eut contre lui, outre Fermat, Roberval et Pascal. La méthode de Fermat est, en droit, très générale même s'il n'en développa lui-même que quelques exemples.

La méthode de Descartes est valable -contrairement à ce que tentèrent d'objecter certains[189]- pour les polynômes en général. Elle a donc de quoi satisfaire pleinement son auteur. Précisément, elle ne convient pas pour les courbes d'équation transcendante dont la factorisation n'est pas possible de la manière suggérée. Elle peut donc apparaître plus restrictive, du point de vue de l'évolution historique de

---

[186]A.T. p.423

[187]Rabuel, p.297 et 320.

[188]Nous n'évoquons ici que les méthodes et discussions pré-leibniziennes et pré-newtoniennes. Des exposés précis de ces méthodes et des débats y afférant existent. Voir pour la méthode de Roberval, Kokiti Hara..., Duhamel...; pour Fermat, Milhaud, *Descartes savants, pp.…*, Scott, *TSWD*, pp.…; Vuillemin*, Met et mat…*pp.

[189]Lettres, III, p.58-59

la géométrie, mais, en même temps et dans le cadre qu'elle se fixe, elle est plus rigoureusement fondée que celle de Fermat.

(Rajouter des points du commentaire de Vuillemin)

LES OVALES

Comme un balancier, l'essai de Descartes, qui s'est fortement incliné ‘du côté algébrique’ durant tout l'exposé sur les normales, va s'infléchir radicalement et présenter un long argumentaire pour l'acceptabilité géométrique d'une famille de courbes rendues connaissables par construction; et qui plus est, par construction d'un type nouveau puisqu'il ne s'agit plus des compas ou des glissières précédents. Les ovales de Descartes rattachent en outre le troisième essai au précédent et -plus généralement- à cette branche de la connaissance qui eut une si grande place pour son auteur, à savoir la dioptrique. Les courbes qui sont ici étudiées ont été présentées, suggérées et partiellement analysées lors des travaux d'optique. Claude Rabuel présente fort bien la question en écrivant *“M. Descartes explique en prmier lieu la nature et les effets de quatre genres d'ovales qu'il a inventées; en second lieu il vient à la figure qu'il faut donner aux verres qui réuinissent à un point donné les rayons qui viennent d'un autre point. Les choses qu'il nous faut expliquer sont celles-ci. 1) la réflexion et la réfraction de la lumière en peu de mots. 2) la description des quatre sortes d'ovales 3)leurs propriétés par rapport à la réflexion et à la réfraction de la lumière et la démonstration de ces propriétés 4) Quelles propriétés, le cercle, la parabole, l'ellipse et l'hyperbole ont par rapport à la réflexion et à la réfraction de la lumière 5) La figure qu'il faut donner aux verres, afin qu'ils réunissent en un point donné les rayons qui viennent d'un autre point donné”*[190].

La loi de la réfraction, dite *loi de Descartes*, ou *loi des sinus* rend compte de la manière dont un rayon de lumière est dévié lorsqu'il passe d'un milieu à un autre[191].

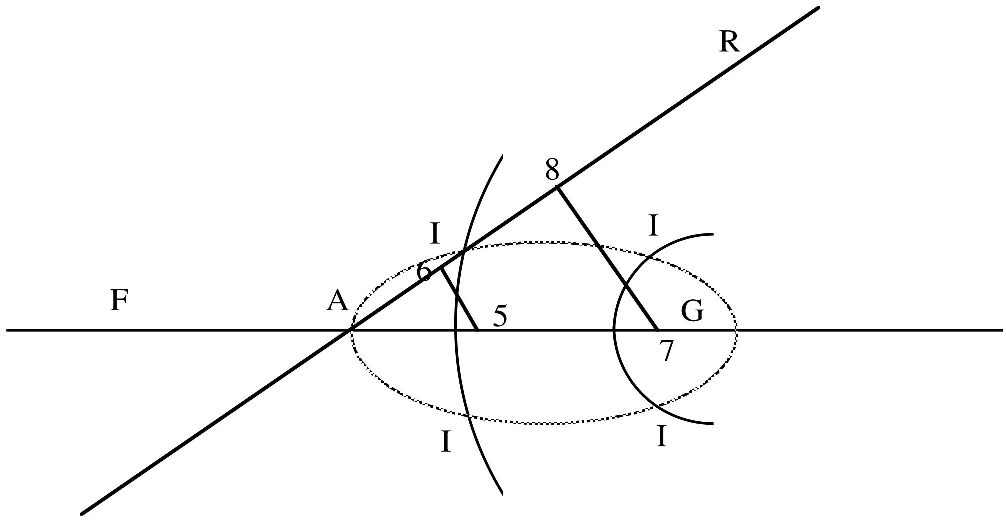
Descartes cherche donc la forme que doivent avoir des courbes pour faire converger des rayons issus d'un point. Il montre que, si un rayon vient de A et doit converger vers B, alors la courbe doit être telle que le rapport entre la différence AG - AS à la différence entre BS - BG soit précisément le rapport des sinus des angles d'incidence et de

[190]Rabuel, p.337

[191]Petite note sur sini/sinr = r/i.

réflexion. De telles courbes décrivent des ovales d'espèces distinctes selon la position du sommet S par rapport au segment AB. L'auteur considère quatre espèces d'ovales dont il donne d'abord la construction.

Le premier ovale se construit ainsi:



Deux lignes, AF et AR se coupent selon un angle arbitraire. Un cercle de centre F, coupe (AF), au -delà de A, en un point noté 5. Sur AR, le point noté 6 respecte la proportion ci-dessus mentionnée; A6 : A5 est comme le rapports des sinus. Soit g sur la demi-droite [A5), tel que AF: AG dans le même rapport.

Soit maintenant R, tel que AR soit égal à AG et un cercle de centre G et de rayon R6. Ce cercle coupe le premier cercle tracé en deux point I qui sont des points de l'ovale cherché.

Le procédé est répété autant qu'on le veut, en faisant varier la position du point 5. On obtient un point quelconque de cette courbe. Voici qui -selon Descartes- les distingue des courbes mécaniques.

Les autres constructions sont de même nature et il faut signaler que certains cas particuliers de ces ovales donnent des lignes droites, des hyperboles ou des ellipses[192]. On trouve en cela, non pas une preuve, mais un argument en faveur du caractère géométrique (donc algébrique de ces courbes).

[192]Une étude précise de ces ovales est faite par Rabuel, pp.337-400. Elle est partiellement reprise in Scott, pp.121-133.

Il nous importe de considérer que nous sommes en présence ici d'une famille de courbes connues parce qu'elles sont constructibles et constructibles ‘par point’. S'il n'est rien dit de leurs équations, on connait leurs éléments caractéristiques, les foyers, appelés ‘points brûlants’ et surtout leurs propriétés optiques.

L'auteur suggère une construction d'ovale par instrument *ad hoc*. C'est un procédé combinant la corde du jardinier et la règle pivotante. Si l'affaire est astucieuse, il faut bien dire qu'elle affaibli quelque peu un argument d'irrecevabilité contre la spirale d'Archimède. Huygens en effet, avait proposé un instrument traceur de spirale qui n'était pas plus compliqué que ce traceur d'ovale. Pour recevoir l'un et rejeter l'autre, il faut un critère particulier, ce qui nuit à la généralité des notions et des méthodes[193].

Le calcul algébrique, s'il ne sert pas ici à définir les courbes, est d'un secours admirable au service de la géométrie. C'est le calcul qui va administrer la preuve des performances optiques des ovales. La coupure de style, voire même de programme, que l'on veut mettre en avant, parfois, entre le passage sur les tangentes et le passage sur les ovales est prise en défaut par une anticipation délibérée de Descartes. Le premier ovale a déjà été introduit, avant d'être construit ‘par point’; il constitue le troisième exemple donné d'application de la méthode des normales et de l'identification des coefficients. Une grande partie du calcul algébrique nécessaire à la démonstration ‘optique’ traitée maintenant a été effectuée alors[194]; elle concerne le calcul de la sous-normale. Descartes renvoie évidemment son lecteur à ce passage *“ainsi qu'il a été montré ci-dessus”* [195].

Nous rendons compte, ici du calcul concernant le premier ovale.

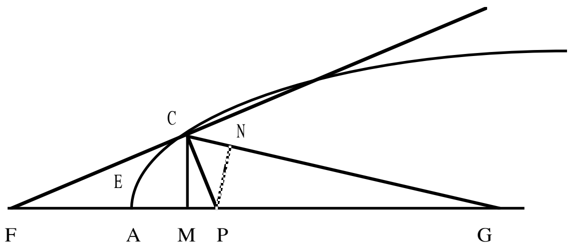
Les *“lignes qui mesurent les réfractions”* des milieux considérés sont *d* et *e*. L'ovale est caractérisée par le fait que la différence CF-FA a, avec la différence GA-GC, le rapport *e*/*d*.

---

[193]Voir la comparaison des instruments in H.Bos, 1981.

[194]A.T. 416-7 pour l'introduction de cette courbe et A.T. 422 pour le calcul préparatoire.

[195]A.T. 432



Dans la figure ci-dessus, on a: AF = c; AG = b; CF-FA = z, donc GC= $b-\frac{e}{d}.z$ (qui dérive trivialement de la caractérisation de cette ovale).

On pose CM =x, AM = y, d'où FM = $c+y$ et GM = $b-y$

On considère la normale PC, en C pris arbitrairement. Pour la connaître, il faut calculer la sous-normale AP = v.

C'est précisément là qu'est utilisé le résultat obtenu dans le passage sur les tangentes; soit

AP = v= $(bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z)/ (bde + cd^2 + d^2z -e^2z)$

Par considération sur les triangles semblables de la figure, on obtient

CF:CM :: FP:PQ soit, PQ = CM.FP/ CF et

GP:PN :: CG:CM soit, PN = CM.GP/CG d'où

PQ: PN :: FP.CG : CF.GP

Il suffit donc de montrer que FP.CG : CF.GP :: d:e

pour avoir prouvé que PQ: PN :: d:e

La figure nous fait bien voir que PQ: PN est bien le rapport des sinus d'incidence et de réfraction.

Calcul de FP.CG,

on a FP = $c + v$

$= c + (bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z)/ (bde + cd^2 + d^2z -e^2z)$

$= (bcd^2 + c^2d^2 + bd^2z + cd^2z)/ (bde + cd^2 + d^2z -e^2z)$

CG est connu égal à $b-\frac{e}{d}.z$

Le produit FP.CG est donc égal à

$(bcd^2 + bc^2d^2 + b^2d^2z + bcd^2z - bcdez - c^2dez - bdez^2 - cdez^2)/$
$(bde + cd^2 + d^2z -e^2z)$

Cacul de PG.CF,

on a PG = $b - v$

$= b - (bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z)/ (bde + cd^2 + d^2z -e^2z)$

$=(b^2de + bcde - be^2z - ce^2z)/ (bde + cd^2 + d^2z -e^2z)$

CF est connu égal à $c + z$

Le produit PG.CF est donc égal à

$(b^2cde + bc^2de - bce^2z - c^2e^2z + b^2dez + bcdez - be^2z^2 - ce^2z^2)/$
$(bde + cd^2 + d^2z - e^2z)$

En divisant le premier produit par d et le second par e, on obtient
FP.CG/PG.CF = PQ/PN = d/e. Cqfd

Les propriétés optiques sont examinées par Descartes dans un grand nombre de cas: si les rayons viennent de l'extérieur des ovales, s'ils viennent de l'intérieur, s'ils sont issus d'un des foyers etc. L'étude est poursuivie pour chacun des quatre genres et, à chaque fois, le calcul algébrique est exploité, à partir d'une propriété caractéristique de la courbe et de la loi des sinus en ce qui concerne la réfraction et la loi d'égalité des angles en ce qui concerne la réflexion.

De belles propriétés des coniques sont ainsi rencontrées, comme la réflexion de foyer à foyer pour une ellipse, la réflexion vers le foyer ‘intérieur’, d'un rayon dirigé vers le foyer ‘extérieur’ d'une hyperbole…

Si l'on considère d'une part, toutes les situations constituées par une émission et une convergence, et d'autre part tous les ovales possibles, il semble qu'une recherche ou une hypothèse de coïncidence existe chez Descartes. A une variation continue des conditions initiales de nature optique correspondrait une variation continue des solutions géométriques, ainsi, *“j'omets quantité d'autres réfractions et réflexions qui sont réglées par ces mêmes ovales”*[196].

[196]A.T. 431.

LIVRE TROISIÈME

Est-ce le plus important et le plus innovateur des livres cartésiens sur les mathématiques ou, au contraire, est-ce le plus banal et le plus directement inspiré par, voire plagié sur ses prédécesseurs? Les deux jugements ont été porté, le premier notamment par Cantor qui y voit *“einen wirklichen Markstein in der geschichtlichen Entwickelung inder Lehre von Gleichungen”*[197], le second immédiatement par Wallis qui estime que *“this treatise of Mr Harriott was (it seems) so well liked by Des Chartes, that he hath in a manner transcribed the whole of it for the substance (though in other order and words) into his Geometry (but without so much as even naming the author)”*[198]. Nous le verrons, de remarquables innovations y voient le jour mais il est vrai que l'absence quasi totale de références aux travaux des algébristes précédents et contemporains ne rend pas justice à ce que l'auteur, très vraisemblablement, leur devait[199]. Ce qui nous importe ici n'est d'ailleurs pas de faire le bilan précis de ce qui est proprement inventé par Descartes, mais surtout de comprendre les objectifs qu'il poursuit au cours de ce livre algébrique et comment il entend les atteindre.

LA SIMPLICITE

Un premier paragraphe signale deux manières symétriques d'être fautif dans le traitement des problèmes géométriques. On l'est en usant de moyens trop complexes ou en usant de moyens trop peu composés. La seconde faute est indiscutable: si l'on poursuit la résolution d'un problème en s'aidant de courbes d'un genre trop simple, la recherche sera tout simplement vaine et l'on ne parviendra pas au résultat. La première nous enseigne davantage quant à la bonne méthode. Un problème étant donné, il se peut qu'il soit résoluble (constructible) grace à une certaine courbe; si l'on découvre que ce même problème est aussi résoluble par d'autres courbes, une question se pose: les

---

[197]Cantor, cité in Scott, p.154 (Cantor, ii, p.722, à vérifier)

[198]Memoranda de Wallis sur un feuillet de son *Artis Analyticae Praxis* d'Harriot, Rigaud, MSS. (Bodleian) VI, p.41.

[199]La question se pose avec beaucoup d'insistance en ce qui concerne le travail d'Harriot, ce qui induit le jugement suivant de F.V. Mormey au sujet de Descartes: *“[Il] a su mener jusqu'à leur aboutissement, avec une lucidité et un brio typiquement français, les choses qui étaient demeurées obscures aux yeux des successeurs d'Harriot”*, F.V. Morley, *Scientific Monthly*, XIV, 1922, p.63.

résolutions sont-elles équivalentes; sont-elles même toutes légitimes? Non répond Descartes, il convient de ne garder que la solution qui mobilise la courbe du genre le plus simple. Utiliser les autres courbes, d'un genre plus composé que ne l'exige la nature du problème est une erreur. Ainsi du problème consistant à tracer les moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données. Le Mesolabum donne un moyen très facile d'y parvenir, mais -dans le cas de deux moyennes proportionnelles- on recourt à une courbe du second genre, alors qu'il existe une solution par les coniques -courbes du premier genre. On le voit, la simplicité n'est pas la facilité (pas forcément), il faut savoir faire plus difficile pour faire plus simple. Comme nous l'avons déjà dit, la *géométrie* ne fait pas de la rigueur démonstrative le critère suffisant de la justesse scientifique. Le critère supérieur, celui qui établit la justesse cartésienne est le critère d'ordre. Les résultats doivent être produits en bon ordre, du plus simple vers le plus composé.

Encore une fois, les hiérarchies sont nettes: les objets constitutifs de la science mathématique réorganisée sont les courbes et les constructions en ligne des racines; mais ces objets ne révèlent pas eux-mêmes leur organisation, leur ordonnancement. Leur considération ne suffit pas à constituer la science dont ils sont les objets. C'est l'algèbre qui réalise cette tâche éminente et nécessaire. En effet, le genre des problèmes est donné par leur mise en équation dont le rôle est à la fois secondaire et décisif. Le but est le classement des problèmes proprement géométriques, le moyen est le traitement algébrique de ces problèmes.

La longue dissertation algébrique qui suit l'introduction du livre troisième est ainsi présentée comme l'énonciation *de quelques règles, pour éviter l'une et l'autre de ces deux fautes*[200].

Henk Bos a clairement situé la démarche en décrivant ainsi le début de ce troisième livre: *“Les constructions doivent être réalisées au moyen des courbes les plus simples possibles. Le critère principal de simplicité n'est pas la facilité du tracé mais le genre minimal. Par exemple, le Mesolabum trace des courbes qui ne sont pas appropriées pour construire les moyennes proportionnelles. C'est une erreur, une faute, en géométrie de construire à l'aide d'une courbe autre que la plus simple possible, ou d'essayer de construire avec une trop simple.*

[200]A.T. p.444

Pour éviter ces fautes, une certaine théorie des équations doit nécessairement être élaborée"[201].

LA REDUCTION DES EQUATIONS

Nous mentionnons d'abord six règles principales énoncées par Descartes en observant immédiatement deux choses. Elles ne sont pas toujours démontrées, et souvent, l'argument fourni est en fait un exemple qui est parfois *ad hoc*. En second lieu, la technique essentielle mise en œuvre par l'auteur est celle de l'identification des coefficients de polynômes réputés égaux. Descartes avait signalé, dès le Livre II, l'importance de cette procédure.

Les nombreux passages techniques de ce livre nous contraignent à faire des 'simplifications' dont on voudra bien tenir compte. Nous parlons ici aussi bien de polynôme quand Descartes emploie systématiquement le mot d'équation. Les seules qu'il envisageait étaient polynomiales et cet modernisation évite des confusions sans entraîner de contre sens. Les notations cartésiennes (les coefficients parfois mis en colonne sont notés entre parenthèses, les "." pour signifier +/-, les factorisations…) sont assouplies pour les rendre lisibles à un lecteur moderne. Il y a plus, certaines difficultés qui mériteraient commentaires sont passées sous silence; ainsi les discussions sur les signes affectés aux coefficients des polynômes et celles concernant la sélection des racines sont négligées par nous. Le cadre de ce travail ne permet un suivi pas à pas des calculs cartésiens et nous renvoyons aux travaux grâce auxquels le lecteur pourra satisfaire son éventuelle curiosité.

1-Le degré de l'équation (Descartes parle de dimension) donne le nombre possible de ses racines. Ces racines peuvent être vraies, c'est-à-dire positives, ou fausses, c'est-à-dire *moindre que rien* (soit encore *le défaut d'une quantité*). Un polynôme de degré n a donc -au plus- n racines, et Descartes ne dit pas autre chose.

Ainsi, $x^4 - 4x^3 -19x^2 + 106x - 120 = 0$ admet trois racines vraies 2; 3 et 4 et une racine fausse 5.

La mise en relation du degré de l'équation et du nombre de ses racines avit déjà été évoquée par Cardan pour les cubiques, par Girard et par Harriot. Stifel avait admis les 'numeri absurdi' comme fausses racines.

[201]H. Bos,1993.

2-Un polynôme ayant α pour racine est 'factorisable' par $(x-\alpha)$ et réciproquement.

3-Le polynôme précédent peut être divisé par (x-2), (x-3), (x-4) et (x+5).

4-Le nombre des vraies et fausses racines peut être découvert sans qu'elles soient connues, à l'aide de la règle des changements de signes des coefficients. Un polynôme étant ordonné suivant les puissances décroissantes de l'inconnue, *«il peut y en avoir autant de vraies, que les signes + et - s'y trouvent de fois être changés; et autant de fausses que qu'il s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes - qui s'entresuivent"*[202]

Cette règle était déjà connue -incomplètement par Cardan. Elle est cependant prise en défaut lorsque l'on considère les racines 'imaginaires' ou complexes. Descartes le savait sans doute puisqu'il évoque cette difficulté dans une lettre tardive à Carcavy[203], dans laquelle il répond aux objections de Roberval.

5-Une équation peut être modifiée, simplifiée, par un changement de variable du type $y = x + \alpha$. L'équation $P_n(x) = 0$ est alors remplacée par le système. $P'_n(y) = 0$ et $y = x + \alpha$. Elle peut aussi être modifiée par un changement de variable du type $y = ax$.

Viète avait su utiliser des changements de variable de type $y = x + \alpha$, et Harriot manipulait les deux types de changements.

6-Ces changements permettent des transformations qui aident à la factorisation et donc à la résolution. En particulier, il est possible d'obtenir un polynôme dans lequel le second terme disparaisse. Ainsi l'équation

$y^4 + 16y^3 +71y^2 -4y -420 = 0$ peut -elle donner naissance au système

$z^4 -25z^2 - 60z - 36 = 0$ et $z = y + 4$.

Descartes donne un calcul général concernant cette propriété, pour le degré 4. Cette importante technique était à l'œuvre chez Cardan, Ferrari, Viète et Harriot.

Un autre enjeu de ces changements est d'avoir des coefficients entiers, plutôt que 'sours' ou 'rompus', c'est-à-dire fractionnaires ou

---

[202]A.T. p.446.

[203]A.T., correspondance, année 1649, pp.453-4. John Wallis critiquera précisément cette 'règle des signes' dans son *Algebra*.

radicaux. Enfin, ils permettent de se situer dans un domaine de racines toutes vraies.

L'équation $x^3 - x^2\sqrt{3} + 26/27.x - 8/(27\sqrt{3}) = 0$ est transformable en

$y = x\sqrt{3}$ et $y^3 - 3y^2 + 26/9.y - 8/9 = 0$, elle-même transformable en

$z = 3y$ et $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$, dont les racines sont 2,3 et 4 d'où l'on tire, pour les valeurs de x, $2\sqrt{3}/9$, $\sqrt{3}/3$ et $4\sqrt{3}/9$

Les racines, tant vraies que fausses, peuvent être imaginaires, à savoir *"qu'il n'y a aucune quantité qui leur corresponde"*. Si le nom d'imaginaire est dû à Descartes, la présence de ces racines est nettement repérable chez Cardan ou Ferrari mais elles sont négligées comme inutiles par Viète et Harriot.

Ces règles vont être utilisées pour aborder la résolution des équations de degré trois et quatre.

Si l'équation est cubique (du type $P_3(x) = 0$) et qu'après les diverses transformations suggérées auparavant, on obtient une valeur α telle que $P_3(\alpha) = 0$, alors, on peut diviser l'équation cubique par $(x - \alpha)$ et avoir une équation du second degré qui, bien sûr, caractérise le problème comme problème plan.

Lorsque l'équation résiste à cet abaissement de degré, il est alors prouvé que le problème est solide *"et ce n'est pas une moindre faute après cela, de tâcher à le construire sans y employer que des cercles et des lignes droites"*[204].

Il faut souligner la présentation, très bien maîtrisée, des méthodes de division d'un polynôme par un autre, de degré inférieur.

Ayant affaire à une équation de dimension 4, la procédure est assez similaire. On cherchera à abaisser son degré en le divisant par une forme de type $(x - \alpha)$. Si elle réussit, on est évidemment ramené au cas précédent des équations cubiques. Sinon, il faudra chercher la factorisation en deux polynômes du second degré. Après avoir transformé le polynôme en éliminant son second terme, on cherchera à former deux tels polynômes.

En substance, quelle est ici la technique cartésienne?

Soit une équation du quatrième degré, mise en forme:

$x^4 + px^2 - qx + r = 0$

---

[204]A.T., pp.456-7.

On cherche deux polynômes du type

$x^2 + yx + z$ et $x^2 - yx + v$, dont le produit soit égal au polynôme de départ. Le problème est transformé et la méthode d'identification des coefficients joue à plein, de telle sorte que ce sont y, z et v qui deviennent les inconnues d'un système d'équations. Il est remarquable que la plus élevée de ces équations est du sixième degré en y. On a cependant gagné au change, car elle est cubique en y^2; plus précisément, elle est de la forme:

$y^6 + 2py^4 + y^2(p^2 - 4r) - q^2 = 0$

La connaissance de y relève alors des procédures examinées précédemment et, de proche en proche, permet la découverte des racines du polynôme de départ[205].

Voyons un des exemples proposés par Descartes:

$x^4 -4x^2 - 8x + 35 = 0$

On cherche une factorisation en

$(x^2 + yx + z)(x^2 - yx + z)$, soit

$x^4 + (v - y^2 + z)x^2 + (yv - yz)x + vz$

L'identification des coefficients donne le système:

$v - y^2 + z = -4$

$yv - yz = -8$

$vz = 35$

soit, après quelques remplacements,

$v = -2 + y^2/2 - 4/y$ et $z = -2 + y^2/2 + 4/y$

et donc, $35 = (-2 + y^2/2 - 4/y)(-2 + y^2/2 + 4/y)$

d'où l'on tire: $y^6 - 8y^4 - 124 y^2 -64 = 0$ qui, étant quadratique, se résout et admet $y = 4$ et $y = -4$ comme racines. v et z se trouvent immédiatement. Les deux polynômes-facteurs sont donc $x^2 - 4x + 5$ et $x^2 + 4x + 7$ dont les racines sont $2 +/- \sqrt{-1}$ et $-2+/- \sqrt{-3}$. *"On connait par là que les quatre racines de l'équation dont elles procèdent sont imaginaires; et que le problème, pour lequel on l'a trouvée, est plan de sa nature; mais qu'il ne saurait en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre"*[206].

La discussion du nombre des racines, donc de la réduction possible des équations permet le classement des problèmes les ayant fournies, en plans ou solides. Il semble bien que Descartes ait pensé pouvoir

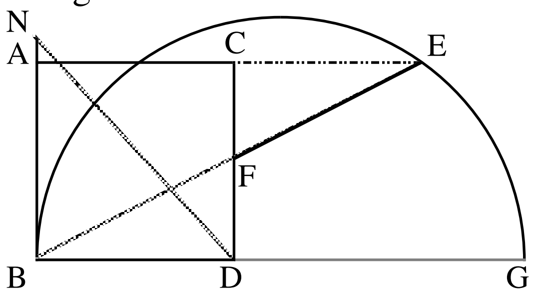
---

[205]On trouvera des calculs détaillés et clairement présentés dans Scott, pp. 140-145.

[206]A.T., p.461.

ramener le traitement des équations de degré 4 à des cubiques, principe dont il ne donne pas de démonstration générale.

Avant d'en venir à l'examen de règles plus générales, l'auteur expose la résolution analytique d'un classique problème lui aussi trouvé et résolu dans Pappus[207]. Soient donnés un carré AD et une ligne BN. On veut prolonger AC jusqu'à E, de sorte que EF, tracée de E vers B et coupant CD en F, soit égale à NB.



Certes, la construction papusienne est correcte et prouve que le problème est plan, mais *"pour ceux qui ne [la] connaîtrait pas, elle serait assez difficile à rencontrer"*[208]. Descartes montre que, par sa méthode, on a le choix de la quantité inconnue et que ce choix, s'il ne masque pas la nature plane du problème, peut cependant s'avérer plus ou moins judicieux. Les équations obtenues étant en effet plus ou moins faciles à démêler.

En posant $a = BD$, $c = EF$ et $x = DF$ comme quantité inconnue, l'équation est $x^4 -2ax^3 + (2a^2 - c^2)x -2a^3x +a = 0$

La racine, d'expression assez lourde, est néanmoins constructible à la règle et au compas:

$DF = 1/2a + \sqrt{(1/4\, a^2 + 1/4\, c^2)} - \sqrt{[1/4c^2 -1/2a^2 + 1/2a\sqrt{(a^2 + c^2)}]}$

La manière cartésienne est à nouveau explicite: *"Je pourrais encore ajouter diverses règles pour démêler les équations qui vont au cube ou au carré de carré, mais elles seraient superflues, car, lorsque les problèmes sont plans, on en peut toujours trouver la construction par celles-ci"*[209].

L'argumentation et les succès réels atteints dans des cas plus ou moins particuliers valent démonstration: c'est la méthode générale qui a

---

[207]*Problème d'Herakleitos*, in Pappus, collection, VII, prop. 72.

[208]Encore une fois, le reproche aux anciens de ne pas révéler les voies de la découverte. La démonstration de la construction de Pappus est donnée par Scott, p.146.

[209]A.T. p.463

été ainsi validée, même si le domaine mathématique découvert par celle-ci n'a pas été systématiquement labouré. Descartes assume cette position en nous avertissant qu'*"au reste, j'ay omis ici les démonstrations de la plupart de ce que j'ai dit à cause qu'elles m'ont semblé si faciles que, pourvu que vous preniez la peine d'examiner méthodiquement si j'ai failli, elles se présenteront à vous d'elles-mêmes, et il sera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les lisant"*[210].

Considérant qu'il a traité complètement des équations de dimension 3 et 4, Descartes suggère qu'il pourrait *"ajouter d'autres* [règles] *pour les équations qui montent jusqu'au sursolide ou au carré de carré, ou au delà, mais j'aime mieux les comprendre toutes en une…"*[211].

Le principe est simple: soit un polynôme P_n de degré n, on cherche à le factoriser en polynômes $Q_{n'}$ et $R_{n''}$, avec n' + n" = n. On est alors ramené à des études de polynômes de degré inférieurs et la classification des problèmes découle du type de factorisation possible. Cette règle est pourtant une pétition de principe car les méthodes générales de décomposition des polynômes ne sont ni exposées, ni accessibles. La confiance de Descartes dans sa méthode va bien au delà de ce qu'il est réellement en mesure d'établir.

INTERSECTION DE CERCLE ET DE PARABOLE CARTÉSIENNE

Le livre troisième, jusqu'ici strictement algébrique, va maintenant recevoir son interprétation essentielle, c'est-à-dire géométrique. Le classement des équations débouche sur des méthodes de construction. La proposition cartésienne est claire: tout problème solide a une équation dont les racines se trouvent toujours par l'une des trois sections coniques associée à des droites ou des cercles. Parmi les coniques, il est possible de choisir la parabole, *"à cause qu'elle est en quelque façon la plus simple"*[212].

Soit donc l'équation réduite à sa forme la plus simple

$z^4 = pz^2 + qz + r$ pour la dimension quatre ou

$z^3 = pz + q$ pour la dimension trois

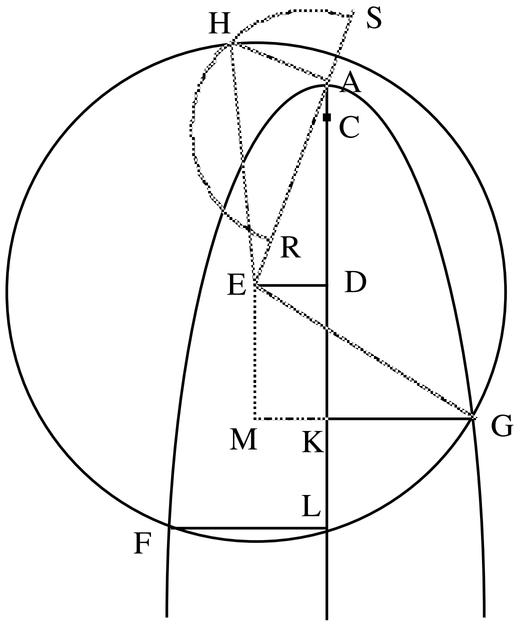
Le signes des coefficients dépend de l'orientation des grandeurs qu'ils représentent. Les divers cas vont donc être rapportés à l'étude de

---

[210]A.T. p. 464.
[211]A.T., p. 463.
[212]A.T., p. 464.

l'intersection d'une parabole et d'un cercle tous deux convenablement choisis.

Soit donc une parabole de sommet A, d'axe (AC) et de paramètre 1. On trace un point D sur l'axe tel que AD = 1/2 (p+1). On choisit une direction positive, perpendiculaire à l'axe, et suivant cette direction, on trace, à partir de D, le segment DE, tel que DE = 1/2q.



Si r est nul, soit dans le cas de l'équation cubique, on trace le cercle de centre E et de rayon EA. L'intersection de ce cercle et de la parabole détermine des points dont l'ordonnée est racine de l'équation de départ.

Si r n'est pas nul, une construction auxiliaire est nécessaire. Sur [AE), on trace le point R tel que AR = r et, sur la demi-droite opposée, on trace S tel que AS = 1. Le demi-cercle de diamètre RS coupe la perpendiculaire à (AE) en un point H dont on sait, depuis le premier livre, que AH = $\sqrt{r}$. Le cercle nécessaire à la construction est alors le cercle de centre E et de rayon EH.

La discussion des diverses situations est conduite, mais de façon incomplète par Descartes. La construction varie selon que r est orientée positivement ou négativement, mais la possibilité d'avoir une quantité négative sous la racine exprimant le rayon du cercle n'est pas mentionnée. De même, l'éventualité de l'absence d'intersection entre le cercle et la parabole, dans le cas de l'équation de degré quatre, est-elle passée sous silence. Après avoir montré qu'une des ‘ordonnées’ construites vérifie bien l'équation finale, l'auteur suggère *“si vous* *appliquez ce même calcul à tous les autres cas de cette règle, en changeant les signes + et - selon l'occasion, vous y trouverez votre compte en même sorte, sans qu'il soit besoin que je m'y arrête"*[213].

La démonstration, en termes modernisés, révèle clairement la méthode:

Soit le repère orthonormal d'origine A et d'axes (AC) et sa perpendiculaire en A. La parabole admet pour équation $y = x^2$. Le cercle de centre A et de rayon EH a pour équation $x^2 - qx + y^2 - (p+1)y = r$

En remplaçant y par sa valeur dans l'équation du cercle, on obtient:

$x^4 - px^2 - qx - r = 0$, ce qui correspond bien à l'équation générale proposée (le cas $r = 0$ nous ramenant à l'équation cubique)[214].

On se souvient que la recherche des moyennes proportionnelles, rendue possible à l'aide du mésolabum, n'était pas -par ce moyen- acceptable puisqu'elle requérait alors des courbes trop composées. Rappelant qu'une telle recherche (pour deux moyennes) se ramenait à la résolution d'une cubique, Descartes en déduit une construction par cercle et parabole qui rend bien compte de la nature du problème.

La trisection de l'angle subit le même traitement. Un angle NOP étant donné, la corde NP du cercle de rayon posé égal à 1 est connue et notée q. On veut construire l'angle NOQ égal au tiers de l'angle donné. Soit NQ la corde correspondante à cet angle cherché; on pose z = NQ. L'équation dérivée du problème est du type $z^3 = 3z - q$. La démonstration standard mise au point précédemment donne la solution.

On se souvient que l'échec grec d'une construction par cercle et droite de deux moyennes proportionnelles avait donné lieu à une solution -due à Ménechme- par intersection de deux paraboles. La classification cartésienne est quelque peu confuse qui réfute comme fautive cette construction et admet celle qui résulte de l'intersection parabole-cercle. Ainsi, le couple parabole-parabole doit-il être déclaré plus composé que le couple parabole-cercle. Tout ceci souligne la nature ambigue du cercle que Descartes répugne à considérer comme une conique particulière.

---

[213]A.T., p. 469.

[214]Un calcul plus détaillé est aussi donné par Scott, pp.148-150; de même, bien sûr qu'il avait été donné par Rabuel.

Le paragraphe suivant est extrêmement révélateur du type de certitudes promues dans *La géométrie*. *“Il est vrai que je n'ai pas encore dit sur quelles raisons je me fonde pour oser ainsi assurer si une chose est possible ou ne l'est pas…”*[215]. La question visée est particulièrement l'impossibilité de construction des problèmes solides (disons plutôt les problèmes d'équation cubique et carré de carré) par cercles et droites seulement. La conviction cartésienne est ‘générale’: un rapport unique caractérisant la courbure d'un cercle, sa connaissance ne permet, réciproquement, que de découvrir une quantité inconnue (par exemple une moyenne proportionnelle); alors que les coniques ont des courbures à caractéristique double… *ergo*, elles permettront de découvrir deux inconnues. Ce raisonnement global, fondé sur une analogie de détermination, n'est pas -à nos yeux- mathématique et ne peut remplacer une démonstration. En fait, la démonstration d'impossibilité de construction par règle et compas de deux moyennes proportionnelles, de la trisection du cercle, de la duplication du cube ne fut accomplie qu'en 1837 par Wantzel[216].

Après avoir traité des problèmes solides, dont l'équation ne monte pas au delà du quatrième degré, l'auteur examine les problèmes dont l'équation est du cinquième ou sixième degré. L'outil décisif pour les résoudre est la ‘parabole cartésienne’ ou conchoïde parabolique qui a été introduite au livre II, par composition d'une parabole et d'une droite pivotante et qui est du quatrième degré. Il a été établi qu'elle était du genre immédiatement supérieur aux coniques; il est donc conforme à la méthode qu'elle serve adéquatement aux problèmes d'un genre plus composé que les problèmes solides. *“C'est pourquoi je croirais faire en ceci tout le mieux qui se puisse, si je donne une règle générale pour les construire, en y employant la ligne courbe qui se décrit par l'intersection d'une parabole et d'une ligne droite, en la façon ci-dessus expliquée. Car j'ose assurer qu'il n'y en a point de plus simple en la nature, qui puisse servir à ce même effet; et vous avez vu comme elle suit immédiatement les sections coniques, en cette question tant*

---

[215]A.T., p. 475.

[216]Wantzel, *Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut être résolu par la règle et le compas”*, *Journal des mathématiques pures et appliquées* (1837), p.366-372. Voir Serfati, 1992.

cherchée par les anciens, dont la solution enseigne par ordre toutes les lignes courbes qui doivent être reçues en géométrie"[217].

Toutes ces équations, assure Descartes, peuvent être rapportées à des équations de degré six n'admettant que des racines positives (vraies). A l'aide des transformations régulières sur les équations, on peut les réduire toutes à la forme suivante:

$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + v = 0$, *avec* $q > (p/2)^2$.

Henk Bos a parfaitement résumé la démarche cartésienne sur ce point:*"La construction des racines de cette équation exige la construction de deux courbes relativement à deux axes perpendiculaires. Les racines sont données par les ordonnées des points d'intersection. L'une des courbes est un cercle, l'autre est la 'parabole cartésienne' [...] . Soit la parabole de sommet B et de paramètre a (elle a donc pour équation* $ay = x^2$*) qui se meut le long de l'axe, la droite DP tourne autour de D et l'intersection I de ces deux lignes définit la conchoïde. Celle-ci est caractérisée par trois paramètres a, b et c. Le cercle nécessaire à la construction des racines est lui aussi caractérisé par trois paramètres, son rayon r et les coordonnées de son centre M,* x_m *et* y_m*. Les racines de n'importe quelle équation du sixième degré considérée ici peuvent être construites en ajustant les paramètres aux valeurs des coefficients de la manière suivante:*

$c = p/2$ $\qquad a = \sqrt{t/\sqrt{v} + q - p^2/4}$ $\qquad b = 2\sqrt{v}\,/pa$.

$x_m = 2\sqrt{v}\,/pa - t\,/\,2n\sqrt{v}$ $\qquad y_m = d/a^2$ *avec* $d = r/2 + \sqrt{v} + pt\,/4\sqrt{v}$

$r^2 = t\,/\,2a\sqrt{v} - (s + p\sqrt{v})/a^2 + d^2/\,a^4$.

Descartes montre alors, par calcul direct que les ordonnées des points d'intersection (au plus six) satisfont à l'équation proposée"[218].

Après avoir traité plusieurs cas auxiliaires, Descartes rappelle que les classiques problèmes de moyennes proportionnelles et de n-sections d'angles, plus composés que les précédents sont résolubles par cette méthode générale.

Il est vrai, remarque l'auteur qu'il peut arriver que *"la construction ne soit pas commode pour la pratique..."*[219], mais il ne s'agit que de

---

[217]A.T., p. 476.

[218]H. Boss,1993, pp.24-26.

[219]A.T.,p. 484. Rabuel a mené une critique précise de certains instruments constructeurs cartésiens, en objectant qu'ils n'étaient pas seulemnt difficiles à

défauts de détail. Il estime en effet avoir avoir montré la voie qu'il suffit de suivre *“pour construire tous [les problèmes] qui sont plus composés à l'infini”*. Faisant alors preuve d'un optimisme sûrement exagéré, il conclut *“Car en matière de progressions mathématiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaisé de trouver les autres. Et j'espère que nos neveux me seront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer”*[220].

---

construire ou à manier, mais qu'ils recèlaient des contradictions et des impossibilités dans leur conception même.

[220]A.T., p.485.

ACHEVER LA GÉOMÉTRIE

La réception du troisième des *Essais* du *Discours de la Méthode* fut plutôt fraîche. Echec auprès du public, certes, mais réticences obstinées de la plupart des spécialistes eux-mêmes, tel fut le sort du traité. Les raisons polémiques pèsent lourd dans cette attitude mais elles ne suffisent sans doute pas pour expliquer cet accueil.

Il faut en effet avoir à l'esprit que la *Géométrie* se présente, à la fois comme un modèle achevé, méthodologiquement central, un aboutissement presque définitif et aussi comme une œuvre de circonstances, hâtivement rédigée et peut-être pas indispensable. Ce double et contradictoire éclairage a été donné par son auteur lui-même, en des correspondances diverses.

Elle aurait été rédigée en quelques semaines, pendant que les *Météores* étaient en cours d'impression, elle aurait du être réorganisée ‘quelque jour’, elle aurait réclamé des *notes introductives*, des compléments, des introductions, elle aurait contenu des obscurités (voulues ou non). On trouve effectivement dans diverses attitudes et prises de position de Descartes des arguments en ce sens. *“Descartes* , écrit G. Milhaud, *eut sans doute les idées directrices de l'œuvre, mais celle-ci se présente comme un ensemble peu ordonné de ‘notes de créateur’. […] Les pensées de Descartes rarement développées sont dans un ordre plus proche de celui du roman que de celui d'une géométrie […] La Géométrie apparaît comme une série d'intuitions, une sorte d'histoire psychologique des découvertes cartésiennes”*[221]. Pareil point de vue peut mener loin et justifier la mise à l'écart du troisième *Essai* dans une édition des *Œuvres philosophiques*, puisqu'après tout, la connaissance de la *Géométrie* ne serait pas nécessaire à qui veut comprendre les démarches par lesquelles Descartes a construit sa métaphysique, puisque dans *Les Méditations*, il n'est nullement question de mathématiques, puisque Descartes aurait lui-même écarté les mathématiques de la philosophie, puisque la *Géométrie* est impossible à commenter selon les normes habituelles, puisqu'elle est volontairement obscurcie[222].

Tout ceci ne nous convainc pas et la *Géométrie* ne nous paraît pas telle. Nous avons voulu montrer les liens étroits qu'elle entretient avec

---

[221]Gérard Milhaud, A.M., p.360.

[222]Tels sont exactement les arguments avancés par F. Alquié dans son *Introduction*, G.F. I, pp.14-15.

la *Méthode*, avec l'épistémologie cartésienne. Nous sommes en outre convaincu que, si elle fut rédigée brièvement, elle le fut à partir de travaux et de méditations qui venaient de loin. Quant à ses obscurités, indéniables, elles résultent de la volonté cartésienne de se montrer supérieur à ses contemporains dans un domaine qu'il pensait maîtriser et où il n'était pourtant pas à l'abri de critiques et de polémiques précisément argumentées. Mais surtout, elle peut paraître obscure à ceux (et d'une certaine façon, nous en sommes) qui attendent d'une géométrie, une organisation et un déroulement euclidien (ou, pourquoi pas hilbertien). Nous avons aussi voulu montrer que le flux strictement déductif y fait place à l'argumentation générale et méthodique. Elle se devait d'être l'essai le plus convaincant de la performance de la *Méthode* et non le traité de géométrie adéquat aux écoles (du moins dans la forme que lui donnait son architecte).

Le plus grand malentendu vient surtout de ce que Descartes a pensé et affirmé avoir ‘achevé la géométrie’, ce qui n'est évidemment pas vrai, comme l'ont immédiatement prouvé les développements ultérieurs de cette science. La revendication cartésienne doit cependant être prise au sérieux car elle n'est pas sans fondement. L'algébrisation à laquelle Descartes donne un élan décisif est un mouvement qui fera bientôt éclater les frontières du domaine traditionnel des mathématiques: caractère de nombres aussi bien que de lignes, expression possible d'algorithmes nouveaux, les nouvelles écritures se libèreront de leur racines-entraves géométriques. Exprimables ‘algébriquement’, de nouvelles équations, de nouveaux lieux repousseront les limites de la science mathématique. On ne peut que songer à l'œuvre de Leibniz qui aura une si claire conscience de cet accroissement. Géométrie analytique et infinitésimale, théorie des équations, courbes transcendantes … tels seront les nouveaux et immenses chapitres ouverts peu après la rédaction de la *Géométrie*.

Or, de quoi est-il question pour l'auteur du troisième *Essai*? Certainement pas de transformer la nature des objets de la science géométrique. L'enjeu de la grande traduction algébrique n'apparut pas immédiatement. Il est d'abord subreptice et se pose en tant que commodité dont les auteurs (Descartes, mais aussi Fermat) ne voient pas les conséquences essentielles, à savoir la puissance de bouleversement des contenus, des objets et des méthodes mêmes des mathématiques.

L'établissement d'une nouvelle manière d'écrire les mathématiques n'apparaît que comme un aide-mémoire, un moyen de prolonger plus clairement la géométrie traditionnelle des figures et des courbes, ce qui n'est pas un maigre gain.

Naissant comme aide-mémoire, comme notation-abréviation, l'algébrisation s'épanouira en pulvérisant le statut même des objets et des relations mathématiques. Il faut toute la rigueur du géométrisme cartésien et même de sa métaphysique pour le contraindre à endiguer le flot impétueux libéré par lui-même lorsqu'il a fait sauter les vannes de l'écriture symbolique.

Il s'agit bel et bien de mémoire. L'encombrement de la mémoire, l'accumulation d'informations, n'a pas seulement pour effet d'en faire oublier certaines mais aussi de rendre confuse leur présence à l'entendement. L'économie de pensée vise aussi bien à l'éclaircissement comme condition d'une possible et fidèle mémorisation.

C'est l'idée que Léon Brunschvicg prête comme commune à Descartes et Spinoza :"*Le caractère de la géométrie cartésienne, c'est qu'elle applique une méthode originale à des problèmes qui avaient été ou auraient pu déjà être, résolus par le raisonnement synthétique des anciens. Sans modifier à proprement parler la réalité sur laquelle porte la mathématique, elle transforme le mode d'application de l'esprit à cette réalité; elle restreint la part de l'imagination, elle met en jeu l'activité de l'intelligence*" [223].

Ceci n'a de sens que si l'on prend en compte la distinction capitale que fait Descartes entre les techniques de mémorisations très en vogue au XVII^{e} siècle[224] et la véritable mémoire qui relève de la méthode et du bon ordre:

"En lisant attentivement les lucratives sornettes de Lambert Schenkel (De arte memoriae), j'ai pensé que je pouvais facilement embrasser par l'imagination tout ce que j'ai découvert. Il ne s'agit que de réduire les choses à leurs causes, et puisque les choses se réduisent

---

[223]L.Brunschvicg, pp.138-9. Cette conception survivra longtemps et c'est dans l'article *Algèbre* de l'*Encyclopédie méthodique* que d'Alembert écrit :"*La nouvelle algèbre soulage la mémoire et l'imagination, en diminuant beaucoup les efforts qu'elles seraient obligées de faire, pour retenir les différentes choses nécessaires à la découverte de la vérité sur laquelle on travaille, et que l'on veut conserver présentes à l'esprit*", Enc.Méth. Ed. ACL, pp32-3.

[224]Voir les nombreuses versions des *Artes memoriae* des XVI^{e} et XVV^{e} siècles, in Armogathe, p.61.

toutes à une cause unique, il est évident que la mémoire ne sert à aucune science. En effet, celui qui comprendra les causes pourra facilement reformer dans son cerveau par l'impression de la cause des images complètement effacées. C'est là l'authentique ars memoriae, totalement opposée à celle de ce charlatan...»[225]

La mémoire cartésienne, c'est la méthode à l'œuvre, c'est ici l'algèbre qui organise la connaissance de l'étendue.

L'enjeu n'est donc pas de transformer la nature de la science mathématique mais de transformer son étude. Alors surgit une illusion, une chimère: le passage à l'algèbre apparaît comme une solution définitive, le terme de la confusion et de l'aveuglement et au bout du compte il annonce, voire réalise l'achèvement des mathématiques. Cette illusion est compréhensible: en ne modifiant pas la science mathématique elle-même, dans sa nature, dans ce que l'exercice raisonnable et rationnel de l'entendement l'autorise à examiner et à comprendre, bref en n'élargissant pas le domaine de la connaissance légitime et dans le même temps en démultipliant les moyens d'investigation de l'esprit humain aventuré en géométrie, en augmentant considérablement sa capacité de synthèse, de déduction, on pouvait fort logiquement estimer être en mesure d'explorer tout le connaissable des mathématiques.

Il faudrait, pour mieux prendre la mesure de cette illusion, examiner comment Descartes traite de questions mathématiques qui -manifestement- ne se laissent pas enfermer dans le cadre trop étroit qu'il a fixé. Il les résout et les rejette tout à la fois. Ainsi de la quadrature de la cycloïde qu'il réussit par une méthode d'indivisibles[226] mais dont il dévalue la portée, ainsi aussi du remarquable problème de Debeaune dont il exhibe la solution transcendante en affirmant qu'étant issue de deux mouvements *"tellement incommensurables, qu'ils ne peuvent être réglés exactement l'un par l'autre [...] cette ligne est de celles que j'ai rejeté de ma* Géométrie*, comme n'étant que*

---

[225]Descartes, A.T 10,230. Trad.Armogathe, pp.65-6.(le texte est de 1619-20). Comme le dit J.R.Armogathe,*"La mémoire intellectuelle n'est pas, à proprement parler, une mémoire, et la mémoire corporelle cède le pas à l'imagination, elle-même sujette à bien des variations chez Descartes. En proposant de ramener le travail de la mémoire à la recherche des causes, et de l'unité de cause, Descartes ruine la mnémotechnique"*, Armogathe, *La memoria des modernes,*p.68.

[226]Voir G. Milhaud, pp. 165-169.

mécanique"[227], ainsi encore des imaginaires qu'il a laissé poindre dans son troisième livre mais auxquels il n'accordera toujours qu'une existence *"en quelque sorte spectrale"*[228]. Voici comment sont gardées les frontières d'un pays qu'il entend avoir exploré en entier[229].

---

[227]A Debeaune, 20 février, 1639, A.M., p.193.
[228]J.Itard, p.10.
[229]On pourra lire, sur cette question, l'étude de J. Vuillemin, pp.9-68.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

Les références au corpus cartésien sont données suivant l'édition Adam-Tannery des *Œuvres* de Descartes en 13 volumes, Paris, Cerf, 1897-1913, Nouvelle présentation, Paris, Vrin, 1964-1974, abrégée A.T.; nous indiquons ensuite le tome et la page (pour la *Géométrie*, nous omettons le tome, A.T. VI).

La correspondance éditée par Charles Adam et Gérard Milhaud (P.U.F., Paris, 1941) nous a aussi servi, en particulier le tome III et ses indications concernant les textes de commentaire de *La Géométrie*, (En abrégé, A.M.)

La *Géométrie*, parue pour la première fois, avec le *Discours* et les deux autres essais à Leyde, en 1637, est dans A.T., tome VI, paru en 1902 et revu par Bernard Rochot et Pierre Costabel en 1965, pp.368-485. Nous avons couramment utilisé l'édition publiée par J.R. Armogathe, M. Authier et V. Carraud, du *Discours de la Méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie*, Corpus, Fayard, Paris, 1987.

Nous renvoyons en outre à l'édition par Ferdinand Alquié des*Œuvres philosophiques* de Descartes, Garnier, 3 volumes, Paris, 1988 (première éd. 1963), abrégée G.F. En particulier, nous renvoyons à la traduction par Jacques Brunschwig, des *Règles pour la direction de l'esprit* , G.F.I, pp.67-204.

Nous avons tiré profit des *Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit et la recherche de la vérité*, traduites et annotées par J.L. Marion, avec des notes mathématiques de P. Costabel, Martinus Nijhoff, La Haye, 1977.

BIBLIOGRAPHIE

Les citations extraites d'études plus ou moins récentes, en langue étrangère ont été traduites par nous.

Adam C., *Vie de Descartes* .

Belaval Y., *Leibniz, critique de Descartes*

Bos H.J.M., 1981, *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie*, Archive for History of Exact Sciences, 24, 1981, pp.295-338.

Bos H.J.M., 1984, *Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory: the "Construction of Equations", 1637-ca.1750,* Archive for History of Exact Sciences, 30, 1984, pp.333-380.

Bos H.J.M., 1988, *The Structure of Descartes' Géométrie*, in *Descartes, Il metodo e i saggi*, Atti del Convegno per il 350° anniversario della pubbicazione del *Discours de la méthode* et degli*Essais*, Roma, 1990**.**, pp.349-70.

Bos H.J.M., 1993, 3eme séminaire sur *La Géométrie* de Descartes, U.P.R. 21, E.H.E.S.S.,14 mai 1993

Brigaglia A., *La riscoperta dell'analisi classica e i problemi apolloniani*.in *Sur les chemins de l'analyse*.

Brunschwicg L., *Les étapes de la philosophie mathématique*, A. Blanchard, Paris, 1981.

Cantor, cf. note 1, livre III.

Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837, réed. gauthiers-Villars, Paris, 1875.

Clavius C., *Algebra*, in *Opera Mathematica*, Tomus Secundus, Moguntiae, Elz, 1611-1612.

Costabel P., *La réception de la Géométrie et les disciples d'Utrecht,* in *Problématique et reception du Discours de la Méthode et des Essais*, textes réunis par Henry Méchoulan, Paris, Vrin, 1988.

Costabel P., *Les Essais de la Méthode et la réforme mathématique*

Dahan A. et Peiffer J.,*Une histoire des mathématiques*; Point Seuil, Paris, 1986.

Dhombres J., *Nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire*, Paris, 1978.

Foucher de Careil, *Œuvres inédites de Descartes*, précédées d'une introduction sur la Méthode, Auguste Durand, Paris, 1859.

Gilson E., *Commentaire du discours de la méthode*

Giusti E.,*Numeri, grandeze e Géométrie*, in *Descartes, Il metodo e i saggi*, Atti del Convegno per il 350° anniversario della pubbicazione del *Discours de la méthode* et degli*Essais*, Roma, 1990, pp.419-439.

Gouhier H., *Essais sur Descartes*, Vrin, 1937.

Israel G., *Dalle Regulae alla Geometria*, in *Descartes, Il metodo e i saggi*, Atti del Convegno per il 350° anniversario della pubbicazione del *Discours de la méthode* et degli*Essais*, Roma, 1990, pp.441-474.

Itard J., *La Géométrie de Descartes*, Les conférences du Palais de la Découverte, Série D, n°39, Paris, 1956.

Kempe A.B., *On a general Method of describing Plane Curves of the n^{th} Degree by Linkwork*, in “Proc. london Math. Soc.” VII (1876)

Liard, *Descartes*, Baillère, Paris, 1882.

Lebesgue H., *Commentaires sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1950, rééd. Gabay, Paris, 1987.

Marie M., *Histoire des mathématiques,* t.6

Mesnard J., *Œuvres complètes* de Blaise Pascal, Desclée de Brouwer, quatre volumes parus, Paris, 1970-1992.

Milhaud G., *Descartes savant*, Paris, Felix Alcan, 1921.

Pappus d'Alexandrie, *La collection Mathématique*, traduite du grec en français pour la première fois par Paul Van Eecke, Desclée de Brouwer, Paris, 1933.

Rabuel C., *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*, Marcellin Duplain, Lyon, 1730

Rodis-Lewis G., *Descartes*, Textes et débats, Livre de poche, Paris, 1984.

Scott J.F., *The Scientific Work of René Descartes*, Garland Publishing, Inc., New York & London, 1987, pp.84-157.

Serfati A., 1992, *Quadrature du cercle, Fractions continues et autres contes*, A.P.M.E.P. éditeur, Paris, 1992.

Serfati A., 1993, *Les compas cartésiens*, Archives de philosophie, 56, pp.197-230.

Vuillemin J., *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, P.U.F., Paris, 1960, 2ème éd., 1987 .